QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x + x^2\right)$ est égal à

☐ $\ln x + \ln(x+1)$. ☐ $\ln\left(x^2\right) + \ln x$. ☐ $3\ln x$.

2. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ est égal à

☐ -2. ☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $-\dfrac{1}{2}$.

3. Soit $f(x) = \ln(-x)$, $x < 0$. Alors $f'(x)$ est égal à

☐ $-\dfrac{1}{x}$. ☐ $\dfrac{1}{x}$. ☐ $-x$.

4. Soit $f(x) = x\ln\left(x^2\right)$, $x < 0$. Alors $f'(x)$ est égale à

☐ $2(1+\ln|x|)$. ☐ $2(1+\ln x)$. ☐ $\ln\left(x^2\right) + \dfrac{1}{x}$.

5. La limite de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ en 0^+ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ $-\infty$. ☐ 0.

6. La limite de la fonction $x \mapsto \ln x + \dfrac{1}{x}$ en 0^+ est égale à

☐ $-\infty$. ☐ 0. ☐ $+\infty$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto x\ln x - x + 1$ est la primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

2. La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour tout réel x, $\ln x = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t} + \ln 2$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x - x} = +\infty$.

Exercices et problèmes

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous.

1. $\ln x+\ln(x+1)=0$.
2. $\ln(\ln x)=0$.
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(x^4\right)=3\ln 2$.
4. $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$.
5. $\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln\left|4x^2+3x-7\right|$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

1. $\ln\left(\sqrt{3+x}\right)<4$.
2. $\ln(5x)>2+\ln 3$.
3. $\ln(4x+1)\le 0$.
4. $\ln\left(\frac{1+x}{3x-5}\right)\ge 0$.
5. $(\ln x)^2-2\ln x<0$.
6. $\ln|\sin x|<0$.

3 Trouver, dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x+3}$.
2. $f(x)=\frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$.
3. $f(x)=\frac{x^2-2}{x\ln x}$.
4. $f(x)=\frac{\ln\left(x^2-3x+7\right)}{x}$.
5. $f(x)=\frac{\ln\left(x^5-x^3\right)}{x}$.
6. $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.
7. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
8. $f(x)=x\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
9. $f(x)=x^2-(\ln x)^5$.

4 Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln x+\ln 2}{x-\frac{1}{2}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln 7}{x-7}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3\tan x)}{x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{\ln x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$.
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}(\ln x)^{10}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}$.

5 Déterminer dans chacun des cas suivants, une primitive de la fonction f sur I.

1. $f(x)=\frac{1+x+x^2+x^3}{x^4}$, $I=\mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x)=\frac{3x-4}{x+5}$, $I=]-5,+\infty[$.
3. $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, $I=]0,\frac{\pi}{2}[$.
4. $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$, $I=]0,+\infty[$.
5. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $I=]1,+\infty[$.
6. $f(x)=\frac{(\ln x)^3}{x}$, $I=]0,+\infty[$.

6 Calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_e^1 \ln^2 x\,dx$.
2. $\int_1^e x\ln x\,dx$.

3. $\int_e^{e^2} x^2 \ln x \, dx$.

4. $\int_e^1 \frac{x-1}{x+1} dx$.

5. $\int_1^2 5x(\ln x)^2 dx$.

6. $\int_3^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

7. $\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$.

8. $\int_4^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

9. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$.

10. $\int_0^1 \frac{x^2+3x-1}{2x+1} dx$.

7 Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in]1,+\infty[$,
$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}$.

2. Calculer alors $\int_2^3 f(x) dx$.

3. En déduire la valeur de $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)dx}{x^3}$.

8 Etudier, dans chacun des cas ci-dessous, f et tracer sa courbe représentative.

1. $f: x \mapsto (\ln x)^2$.

2. $f: x \mapsto \frac{1}{\ln x}$.

3. $f: x \mapsto \ln(\ln x)$.

4. $f: x \mapsto \ln|x| + \ln(x^2-3)$.

9 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2-x+\frac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln x$.

a. Etudier le sens de variation de g.

b. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g.

3. Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

4. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a. Montrer que la droite $\Delta: y=-x+2$ est une asymptote à C.

b. Etudier la position relative de C et Δ.

c. Tracer C et Δ.

10 Soit la fonction $f: x \mapsto (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Construire, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f et préciser les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe $(O,\vec{i})$.

3. Montrer que la fonction $F: x \mapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 7x$ est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

4. Calculer l'aire du domaine du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations respectives $x=e$, $x=e^2$ et $y=0$.

11 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln|x|<1$.

2. On considère la fonction f définie par
$f(x)=\begin{cases} 2x - x\ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition.

b. Etudier la parité de f, puis dresser le tableau de variation de f.

c. Construire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe de f et préciser la tangente au point d'abscisse 0, ainsi que la nature des branches infinies.

12 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
3. On pose
$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)$
Calculer $g'(x)$ et en déduire que f est strictement croissante sur chacun des intervalles
$]-\dfrac{1}{b}, 0[$ et $]0,+\infty[$.
4. Montrer que $\ln\left(\dfrac{a}{b}+1\right).\ln\left(\dfrac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$.

13 1. Etudier les variations des fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{x}$ et
$v(x) = x - 1 - \ln x$.
2. En déduire que $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$, pour $x > 0$.
3. Utiliser l'inégalité précédente pour déduire que
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$ n entier, $n \geq 2$.

14 1. Montrer que pour
$t \geq 0, 1 - t \leq \dfrac{1}{t+1} \leq 1 - t + t^2$.
2. En déduire que pour tout
$x \geq 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
3. Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
a. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
b. Montrer que f est continue en 0 à droite.
c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser le nombre $f'_d(0)$.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tracer la fonction $x \mapsto \ln x$.
Pour tout entier un entier $n \geq 2$, on pose
$S_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$ et
$T_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n-1)$.

1. Montrer que $T_n \leq \int_1^n \ln x\,dx \leq S_n$.

2. En déduire que $\ln((n-1)!) \leq n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!)$.

Puis que $e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

16 Soit f la fonction définie par
$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.
2. a. Vérifier que si $x \in D$ alors
$f'(x) = \dfrac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$.
b. Calculer $f''(x)$.
En déduire les variations de f'.
c. Montrer que f' s'annule sur $]-\infty,3[$ pour une valeur de α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1
Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,3[$.
d. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]3,+\infty[$.
3. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.
Préciser les asymptotes éventuelles à C.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe C.

17 Soit f la fonction définie par $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{-x}{2}$ est une asymptote à la courbe C.
Préciser la position relative de C par rapport à Δ.
4. Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour C.
5. Construire C.
6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution réelle unique x_0 et que $\frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{20}$.

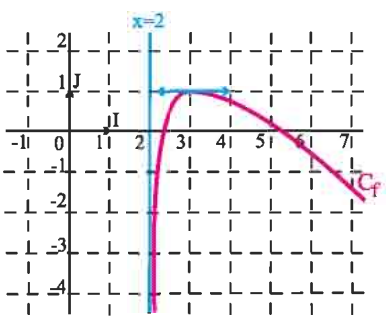
18 A/ 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=(1-x)\ln x$.
Résoudre l'équation $g(x)=0$ puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=\ln x-x$.
a. Dresser le tableau de variation de h.
b. En déduire le signe de h.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$. par $f(x)=\ln x(\ln x-x)$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x)=\frac{g(x)+h(x)}{x}$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer la nature des branches infinies de C_f.
4. a. Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.
c. Vérifier que le point $A(e,-e+1)$ est un point d'intersection de C_f avec T.
5. Construire C_f et T.
6. Soit $\alpha\in]0,1[$ et D la partie du plan limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
a. Déterminer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de D.
b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\mathcal{A}(\alpha)$.
7. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.
b. Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction f^{-1}.

19 La courbe représentative C_f suivante est celle d'une fonction f dérivable sur $]2,+\infty[$.



1. a. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(3)$ et $f'(3)$.
b. On sait que la tangente au point d'abscisse 4 a pour coefficient $-\frac{1}{2}$. Tracer cette tangente.
2. a. Quelles semblent être les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ?
b. Dresser le tableau des variations de f.
3. On suppose que la fonction f est de la forme $f(x)=ax+b+\ln(x+c)$.
A l'aide des valeurs mises en évidence dans la question 1, calculer les réels a, b et c.
Par la suite, on utilise la forme de $f(x)$ trouvée dans cette question.

4. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

5. a. Tracer la droite Δ d'équation $y=-x+4$.

b. Etudier algébriquement la position de la courbe C_f avec Δ.

6. Soit g la restriction de f sur $]2,3]$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $]2,3]$ sur un intervalle J à préciser.

b. Construire dans le même repère la courbe C' de g^{-1}.

c. La fonction g^{-1} est-elle dérivable à gauche de 1?

20 A/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Interpréter les résultats graphiquement.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et que $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit h la restriction de f à $]0,1[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $]0,1[$ sur un ensemble J que l'on précisera.

b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $]0,1[$ une seule solution α et que $0.5<\alpha<0.6$.

c. En déduire que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.

4. Tracer C_f.

5. Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h^{-1} puis déduire le tableau de variation de la fonction h^{-1}.

6. a. Montrer que $h'(\alpha)=-\frac{\alpha+1}{\alpha^3}$.

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et exprimer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de α.

B/ Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2f(x^2)$.

On désigne par C_g la courbe représentative de f dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$

2. En déduire la position relative de C_f et C_g sur $]1,+\infty[$.

3. Soit $x\in[2,+\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g d'abscisse x.

Pour quelle valeur de x, la distance NM est maximale?

21 A/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1. Etudier le sens de variation de g.

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

B/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$.

On note C la courbe de f dans un repère orthogonal. (unité 2 cm sur l'axe (Ox), 4 cm sur l'axe (Oy)).

1. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.

2. Montrer que pour $x>0$, $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$

En déduire le signe de $f'(x)$.

3. Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4. Tracer la courbe C et préciser la tangente à C au point d'abscisse 1.

C/ 1. a. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

b. Montrer que pour $x \geq 1$, $f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Soit F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que pour $x \geq 1$, $F(x) \leq \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

22 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de f.

b. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

2. Etudier f et tracer (C).

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe de la fonction f^{-1}.

c. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx$.

23 On pose pour tout entier $p \geq 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^p dx$.

a. Montrer que la suite (I_p) est décroissante.

b. Montrer que la suite (I_p) vérifie la relation de récurrence $I_{p+1} + \dfrac{p+1}{3} I_p = \dfrac{e^3}{3}$

c. Calculer I_1 et I_2.

2. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\dfrac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \dfrac{e^3}{p+3}$

Calculer alors $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} pI_p$.

24 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ avec $n \geq 2$.

Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} dt$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

25 1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2. a. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. On pose $P_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

26 Pour tout réel a, on désigne par f_a la fonction définie par $f_a(x) = \ln\left(x^2+a\right)$.

1. a. Indiquer, suivant les valeurs de a, l'ensemble de définition de f_a.

b. Donner les différents tableaux de variations de f_a selon les valeurs de a.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_a(x)}{x}$, en déduire la nature des branches infinies des courbes représentatives de f_a dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

d. (C_a) et $(C_{a'})$ désignant les courbes des fonctions f_a et $f_{a'}$ (avec $a \neq a'$).

Soit M un point de (C_a) et M' le point de $(C_{a'})$ de même abscisse.

Montrer que MM' est non nul.

Que pouvez-vous en déduire pour C_a et $C_{a'}$?

Montrer que MM' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Tracer, sur un même graphique, les courbes C_{-1}, C_0 et C_1 dans un même repère orthonormé $(\text{unité } 2 \text{ cm})$.

Préciser les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.

2. Dans cette question, on pose $a=\frac{3}{4}$.

a. On se propose d'étudier la position de la courbe $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à la droite D d'équation $y=x$, pour x positif.

A cet effet, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=x-\ln\left(x^2+\frac{3}{4}\right)$

Etudier le sens de variation de g.

En déduire la position de $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à D.

b. Soit h la restriction de la fonction $f_{\frac{3}{4}}$ à $\mathbb{R}_+$.

Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble que l'on précisera.

c. Tracer la représentation graphique de h et de h^{-1} dans un repère orthonormé.

27 A/ Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x)=(x-1)^n\ln x$.

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On pose pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_n(x)=n\ln x+1-\frac{1}{x}$

a. Etudier les variations de φ_n.

b. Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.

2. a. Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.

b. Tracer les courbes C_1 et C_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1 et C_2 et les droites $x=1$ et $x=2$.

B/ Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (v_n) définie par $v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$, $n\geq 0$.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$u_n=\int_1^2 f_n(x)dx$.

2. Montrer que pour tout

$n\in\mathbb{N}^*,(n+1)u_n=\ln 2-\int_1^2\frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$.

3. En déduire alors

a. La relation

$\frac{1}{2(n+2)}\leq \ln 2-(n+1)u_n\leq\frac{1}{n+2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b. Calculer la limite de $(n+1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On pose, pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout réel $x>0$,

$S_n(x)=1-(x-1)+(x-1)^2+\ldots+(-1)^n(x-1)^n$

a. Montrer que $S_n(x)=\frac{1}{x}-(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

b. En déduire, en utilisant la première question de la partie B, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$\ln 2-v_n=(-1)^{n+1}\left[\ln 2-(n+1)u_n\right]$.

3. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

28 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I/ 1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x+1$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x\in[1,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie par

$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x\in]1,+\infty[,\\ 1 & \text{si } x=1.\end{cases}$

Montrer que f est continue à droite en 1.

3. a. Montrer que pour tout réel t de $[1,+\infty[$,

$t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$.

b. En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$,

$\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\le x-1-\ln x\le\frac{(x-1)^2}{2}$.

c. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$.

d. En déduire que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1)=\frac{1}{2}$.

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative C de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On précisera la nature de la branche infinie de C).

II/ On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par

$F(x)=\begin{cases}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt & \text{si } x\in]1,+\infty[,\\ \ln 2 & \text{si } x=1.\end{cases}$

On désigne par C′ la courbe représentative de la fonction F dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. a. montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$ et pour tout t de $[x,\ x^2]$, $\frac{x}{t\ln t}\le\frac{1}{\ln t}\le\frac{x^2}{t\ln t}$.

b. En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$, on a $x\ln 2\le F(x)\le x^2\ln 2$.

c. Montrer alors que F est continue en 1.

3. a. Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$, F est dérivable et que $F'(x)=f(x)$.

b. soit x un réel de $]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]1,x[$ tel que $F(x)-F(1)=(x-1)F'(c)$.

c. En déduire que F est dérivable à droite en 1 et que $F'_d(1)=1$.

4. Dresser le tableau de variation de F et tracer la courbe C′ de F.

(On précisera la nature de la branche infinie de C′).

III/ Soit α un réel de $]1,+\infty[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, on a $F(x)=\int_1^x f(t)dt+\ln 2$.

2. En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha}$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha^2}$.

29 I/ 1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x-\ln x$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $h(x)\ge1$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-\ln x} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

a. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II/ Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$.

1. a. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $F'(x)=\frac{\ln 2-\ln x}{h(2x).h(x)}$ et $F'_d(0)=0$.

2. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\ln 2$.

3. Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\le F(x)-\ln 2\le\frac{\ln(2x)}{x-\ln x}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4. a. Montrer que $F\left(\frac{1}{2}\right)\le\ln 2$.

b. Montrer alors qu'il existe un réel α de $[\frac{1}{2},\ 1]$ tel que $F(\alpha)=\ln 2$.

5. a. Dresser le tableau de variation de F.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$(\text{On donne } F(1)\simeq0.9 \text{ et } F(2)\simeq1.1)$.

III/ Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-\ln t}dt,\ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$, $\frac{t}{t-\ln t} \leq t$.

b. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit la suite (w_n) définie par

$$w_n = \int_1^n \frac{t}{t-\ln t}dt\ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $[1,+\infty[$,

$\frac{t}{t-\ln t} \leq 1+\ln t$.

b. Calculer $\int_1^n 1+\frac{\ln t}{t}dt$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

30 A/ Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Etudier la position de la courbe de C_f et de la droite $D: y = x$.

b. Construire C_f.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Construire dans le même repère la courbe C′ de la fonction réciproque f^{-1} de f.

B/ Soit F la fonction définie sur $]0,1]$ par

$$F(x) = \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)dt.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $F'(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $t \in [2,+\infty[$, $f(t) \geq \ln t$.

b. Calculer l'intégrale $\int_2^{\frac{2}{x}} \ln t\,dt$.

c) En déduire que pour tout $x \in]0,1]$,

$$F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)-1\right).$$

d. Calculer alors $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$

3. Dresser le tableau de variation de F et donner une allure de la courbe de F.

C/ Pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}dt \text{ et } \ell_n = \lim_{x\to2^+} g_n(x).$$

1. Justifier l'existence de $g_n(x)$ pour tout $x \in]2,+\infty[$.

2. Calculer $g_0(x)$ pour $x \in]2,+\infty[$. En déduire ℓ_0.

3. Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$,

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{2} + 2g_0(x).$$

En déduire ℓ_1.

4. a. Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout, $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2}$

$$-(2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\,dt.$$

b. En déduire que pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+2)g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} + 4(2n+1)g_n(x).$$

c. Exprimer ℓ_{n+1} à l'aide de ℓ_n.

QCM :

1) $Ln(x+x^2)=Lnx+Ln(x+1)$

2) $Ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2}$

3) $f'(x)=\frac{1}{x}$

4) $f'(x)=2(1+Ln|x|)$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{x}=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}(Lnx+\frac{1}{x})=+\infty$

Vrai-Faux :

1) Vrai
Soit $F(x)=xLnx-x+1$
On a : $F(1)=0$
et $F'(x)=Lnx$

2) Faux
En effet :
$Ln(IR_+^*)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+}Ln(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\right[$
$=]-\infty,+\infty[=IR$

3) Faux
Ln(x) existe pour x>0

4) Faux
En effet :
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\underbrace{xLnx-x}_{0^-}}=-\infty$

EX 1 :

1) $(E):Lnx+Ln(x+1)=0$
Lnx *et* $Ln(x+1)$ ont un sens
Ssi x>0 et x>-1 $\Leftrightarrow$ x>0
Dans $]0,+\infty[$
$(E)\Leftrightarrow Ln\left[x(x+1)\right]=0$
$\Leftrightarrow x(x+1)=1$
$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$
$\Delta=5 \qquad x'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *à rejeter*
et $x''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$S_{IR}=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

2) $Ln(Lnx)=0$
$\Leftrightarrow Lnx=1$ *et* $x>0$
$\Leftrightarrow x=e$
$S_{IR}=\{e\}$

3)
$(E):Ln\left(\frac{1}{x}\right)+Ln\left(x^4\right)=3Ln2$
dans $]0,+\infty[$
$(E)\Leftrightarrow Ln\left(x^3\right)=3Ln2$
$\Leftrightarrow 3Lnx=3Ln2$
$\Leftrightarrow x=2$
$S_{IR}=\{2\}$

4) $(E):(Lnx)^2-3Lnx+2=0$
On pose $t=Lnx$ $,x>0$
L'équation devient :
$t^2-3t+2=0$
$t'=1$ *et* $t''=2$
$t=1\Leftrightarrow Lnx=1\Leftrightarrow x=e$
$t=2\Leftrightarrow Lnx=2\Leftrightarrow x=e^2$
$S_{IR}=\{e;e^2\}$

5)

$(E): Ln|x-1|+Ln|x+2|=Ln|4x^2+3x-7|$

$4x^2+3x-7=0$

$x'=1\ ;\ x''=-\frac{7}{4}$

* *dans* $IR\setminus\left\{-2;-\frac{7}{4};1\right\}$

$(E)\Leftrightarrow Ln|(x-1)(x+2)|=Ln|4x^2+4x-7|$

$\Leftrightarrow |(x-1)(x+2)|=|4x^2+4x-7|$

$\Leftrightarrow |x-1||x+2|=|x-1||4x+7|$

$\Leftrightarrow |x+2|=|4x+7|$ *car* $\underline{x\neq 1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7=x+2 \\ ou \\ 4x+7=-x-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ ou \\ x=-\frac{9}{5} \end{cases}$

$S_{IR}=\left\{-\frac{5}{3};-\frac{9}{5}\right\}$

EX 2 :

1) $(I): Ln\left(\sqrt{3+x}\right)<4$

* dans $]-3,+\infty[$

$(I)\Leftrightarrow \frac{1}{2}Ln(3+x)<4$

$\Leftrightarrow Ln(3+x)<8$

$\Leftrightarrow 0<3+x<e^8$

$\Leftrightarrow -3<x<e^8-3$

$S_{IR}=]-3,e^8-3[$

2) $(I): Ln(5x)>2+Ln3$

* dans IR_+^*

$(I)\Leftrightarrow Ln(5x)-Ln3>2$

$\Leftrightarrow Ln\left(\frac{5}{3}x\right)>2$

$\Leftrightarrow \frac{5}{3}x>e^2$

$\Leftrightarrow x>\frac{3e^2}{5}$

$S_{IR}=\left]\frac{3e^2}{5};+\infty\right[$

3) $Ln(4x+1)\leq 0$

$\Leftrightarrow 0<4x+1\leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<x\leq 0$

$S_{IR}=\left]-\frac{1}{4};0\right]$

4) $Ln\left(\frac{1+x}{3x-5}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1+x}{3x-5}\geq 1$ *et* $x\neq\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1+x}{3x-5}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x-5}\geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3	$+\infty$
-2x+6	+		+	0	-	
3x-5	-	0	+		+	
Q	-	||	+	0	-	

$S_{IR}=\left]\frac{5}{3};3\right]$

5) $(I): (Lnx)^2-2Lnx<0$

* dans IR_+^*

$(I)\Leftrightarrow Lnx[Lnx-2]<0$

x	0		1		e^2	$+\infty$
Ln(x)	|	-	0	+	|	+
Ln(x)-2	|	-	|	-	0	+
P	|	+	0	-	0	+

$S_{IR}=]1;e^2[$

6) $Ln|\sin x| < 0$

$\Leftrightarrow 0 < |\sin x| < 1$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \square$

$car\ 0 \leq |\sin x| \leq 1$

$\forall x \in IR$

$S_{IR} = IR \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}; k \in \square \right\}$

EX 3

1) $f(x) = \frac{Ln(x+2)}{(x+2)+1}$

On pose $X = x+2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{LnX}{X+1}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{X}{X+1} \right) . \frac{LnX}{X}$

$= 1 \times 0 = 0$

2) $f(x) = \frac{Ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$

On pose $X = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = X^3$

$x \to +\infty \Rightarrow X \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{Ln(2X^3+3)}{X}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{Ln\left[X^3 \left(2 + \frac{3}{X^3} \right) \right]}{X}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{Ln(X^3)}{X} + \frac{Ln\left(2 + \frac{3}{X^3} \right)}{X}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{3LnX}{X} + \frac{Ln\left(2 + \frac{3}{X^3} \right)}{X}$

$= 0$

3) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{xLnx}$

Pour $x > 1$

$f(x) = \frac{\left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{\left(\frac{Lnx}{x} \right)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{\left(\frac{Lnx}{x} \right)} = +\infty$

(de la forme $\frac{1}{0^+}$)

4) pour $x > 0$

$f(x) = \frac{Ln\left[x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right) \right]}{x}$

$= \frac{Ln(x^2)}{x} + \frac{Ln\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}{x}$

$f(x) = 2\frac{Lnx}{x} + \frac{Ln\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$

5) $x > 0$ (même travaille)

$f(x) = \frac{5Lnx}{x} + \frac{Ln\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

6) $f(x)=\dfrac{1+Lnx}{1-Lnx}$

Pour $x>e$

$$f(x)=\frac{Ln(x).\left[\dfrac{1}{Lnx}+1\right]}{Ln(x).\left[\dfrac{1}{Lnx}-1\right]}$$

$$f(x)=\frac{\dfrac{1}{Lnx}+1}{\dfrac{1}{Lnx}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\dfrac{1}{Lnx}}^{0}+1}{\underbrace{\dfrac{1}{Lnx}}_{0}-1}=-1$$

Ou bien : on pose $X=Lnx$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty}\frac{1+X}{1-X}=-1$$

7) $f(x)=Ln\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=Ln(1)=0$

8) $f(x)=x.Ln\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$

Pour $x>0$

$$f(x)=x.Ln\left(1-\frac{1}{2+x}\right)$$

On pose $X=\dfrac{-1}{2+x}\Rightarrow x=-\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$

$$x\to+\infty\Rightarrow X\to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to 0}-\left(\frac{2X+1}{X}\right)Ln(1+X)$$

$$=\lim_{X\to 0}-(2X+1).\frac{Ln(1+X)}{X}$$

$$=(-1)\times 1=-1$$

9) $f(x)=x^2-(Lnx)^5$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[1-\frac{(Ln)^5}{\underbrace{\dfrac{x^2}{x}}_{0}}\right]$$

$$=+\infty$$

EX 4 :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{Lnx+Ln2}{x-\frac{1}{2}}\right)$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{Lnx-Ln\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=(Ln)'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=2 \qquad car\,(Ln)'(x)=\frac{1}{x}$$

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{Ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln 7}{x-7}$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{-(Lnx-\ln 7)}{x-7}$$

$$=-(Ln)'(7)=-\frac{1}{7}$$

3) soit $f(x)=Ln(1+2\sin x)$

$$f'(x)=\frac{2\cos x}{1+2\sin x}$$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=2$$

4) $\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x^3}=\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x}$

Soit $f(x)=Ln(1+3tgx)$

$f'(x)=\dfrac{3(1+tg^2x)}{1+3tgx}$

$f'(0)=3\,,\ f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=3$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x}=3$

$\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{+\infty}.\underbrace{\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x}}_{3}=+\infty$

5) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{Lnx}$

$f(x)=\dfrac{x+4}{\left(\dfrac{Lnx}{x-1}\right)}$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+4}{\underbrace{\left(\dfrac{Lnx}{x-1}\right)}_{1}}=5$

6) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}.Lnx\overset{x=\sqrt{x}}{=}\lim\limits_{X\to0^+}X.Ln(X^2)$

$=\lim\limits_{X\to0^+}2XLnX=0$

7) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}.(Lnx)^{10}\qquad X=\sqrt{x}$

$=\lim\limits_{X\to0^+}X\left[Ln(X^2)\right]^{10}$

$=\lim\limits_{X\to0^+}2^{10}.\left(XLn^{10}X\right)=0$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Ln(1+3x)}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overbrace{Ln(1+3x)}^{3}}{\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{1}}=3$

EX 5 :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$

$I=IR_+^*$

$F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+Ln|x|$

$F(x)=Lnx-\dfrac{2+3x+6x^2}{6x^3}$

2) $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+5}\ ;\ I=]-5,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{3(x+5)-19}{x+5}$

$f(x)=3-\dfrac{19}{x+5}$

$F(x)=3x-19.Ln|x+5|$

$F(x)=3x-19Ln(x+5)$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}$

$f(x)=\dfrac{-(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}$

$F(x)=-Ln|\cos x+\sin x|$

$F(x)=-Ln(\cos x+\sin x)$

$car\ \ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

$F(x)=Ln|x^2+x|$

$F(x)=Ln(x^2+x)\ \ ;x\in\ ]0,+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{Lnx}$

$F(x)=Ln|Lnx|$

$F(x)=Ln(Lnx)\ \ pour\ x\in\ ]1,+\infty[$

6) $f(x)=\dfrac{1}{x}(Lnx)^3$

$F(x)=\dfrac{1}{4}(Lnx)^4$

EX 6 :

1) $I=\int_e^1 Ln^2x.dx$

$$\begin{cases} U'(x)=1 \xrightarrow{P} U(x)=x \\ V(x)=Ln^2x \xrightarrow{d} V'(x)=\frac{2}{x}Lnx \end{cases}$$

$$I=\left[xLn^2x\right]_e^1-2\int_e^1 Lnx.dx$$

$$I=-e-2\left[xLnx-x\right]_e^1$$

$$\underline{I=2-e}$$

2) $I=\int_1^e xLnx.dx$

$$soit\begin{cases} U'(x)=x \xrightarrow{P} U(x)=\frac{1}{2}x^2 \\ V(x)=Lnx \xrightarrow{d} V'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2Lnx\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x.dx$$

$$I=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$\underline{I=\frac{1+e^2}{4}}$$

3) $I=\int_e^{e^2} x^2.\ln(x)dx$

$$soit\begin{cases} u'(x)=x^2 \to u(x)=\frac{x^3}{3} \\ v(x)=Ln(x) \to v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I=\left[\frac{x^3}{3}Ln(x)\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{1}{3}x^2dx$$

$$=\frac{2.e^6}{3}-\frac{e^3}{3}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_e^{e^2}$$

$$=\frac{5.e^6-2e^3}{9}$$

4)

$$I=\int_e^1\frac{x-1}{x+1}dx=\int_e^1(1-\frac{2}{x+1})dx$$

$$=\left[x-2Ln|x+1|\right]_e^1$$

$$=1-e+2Ln(\frac{e+1}{2})$$

5) $I=\int_1^e 5x(Lnx)^2.dx$

Soit :

$$soit\begin{cases} U'(x)=5x \longrightarrow U(x)=\frac{5x^2}{2} \\ V(x)=(Lnx)^2 \longrightarrow V'(x)=\frac{2}{x}Lnx \end{cases}$$

$$I=\left[\frac{5x^2}{2}(Lnx)^2\right]_1^e-\int_1^e 5.x.Lnx.dx$$

$$I=\frac{5e^2}{2}-5\int_1^e x.Lnx.dx$$

$$I=\frac{5e^2}{2}-5\left(\frac{1+e^2}{4}\right) \qquad d'aprés\ 2)$$

$$I=\frac{5}{4}(e^2-1)$$

6) $I=\int_3^2\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{Lnx}}dx$

$$I=\left[2\sqrt{Lnx}\right]_3^2=2\left(\sqrt{Ln2}-\sqrt{Ln3}\right)$$

7) $I=\int_2^3 Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

Soit :

$$\begin{cases} U'(x)=1 \longrightarrow U(x)=x-1 \\ V(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow V'(x)=\frac{-2}{(x+1)(x-1)} \end{cases}$$

$$I=\left[(x-1)Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^3+\int_2^3\frac{2}{x+1}dx$$

$$I=2Ln2-Ln3+\left[2Ln|x+1|\right]_2^3$$

$$I=2Ln2-Ln3+2Ln4-2Ln3$$

$$\boxed{I=6Ln2-3Ln3}$$

8) $I=\int_4^2 \frac{dx}{xLn(x)}=\int_4^2 \frac{1/x}{Ln(x)}dx$

$I=\left[Ln\left|Lnx\right|\right]_4^2$

$=Ln\left[Ln(2)\right]-Ln\left[Ln(4)\right]$

$\boxed{I=-Ln(2)}$

9) $I=\int_1^2 \frac{1}{x}Lnx.dx$

$I=\left[\frac{1}{2}(Lnx)^2\right]_1^2$

$\boxed{I=\frac{1}{2}(Ln2)^2}$

10) $I=\int_0^1 \frac{x^2+3x-1}{2x+1}.dx$

Soit :

$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{2x+1}$

$f(x)=\frac{x^2+3x+\frac{5}{4}-\frac{9}{4}}{2x+1}$

$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{9}{4}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

$f(x)=\frac{x+\frac{5}{2}}{2}-\frac{\frac{9}{4}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{9}{4(2x+1)}$

$I=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}x-\frac{9}{8}Ln\left|2x+1\right|\right]_0^1$

$\boxed{I=\frac{3}{2}-\frac{9}{8}Ln3}$

EX 7 :

$x\in\left]1,+\infty\right[$

$f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$

1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)}$

Identifions $\begin{cases}a+c=0\\b-a=0\\-b=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=1\end{cases}$

D'où

$f(x)=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}$

2)

$\int_2^3 f(x)dx=\left[-Lnx+\frac{1}{x}+Ln(x-1)\right]_2^3=Ln\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{6}$

3) $I=\int_2^3 \frac{Ln(x-1)}{x^3}dx$

On pose :

$\begin{cases}U'(x)=\frac{1}{x^3}\rightarrow U(x)=\frac{-1}{2x^2}\\V(x)=Ln(x-1)\rightarrow V'(x)=\frac{1}{x-1}\end{cases}$

$I=\left[\frac{-1}{2x^2}Ln(x-1)\right]_2^3+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dx}{x^2(x-1)}$

$I=\frac{-1}{18}Ln2+\frac{1}{2}\left(Ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)$

$\boxed{I=\frac{17}{18}Ln2-\frac{1}{2}Ln3-\frac{1}{12}}$

EX 8 :

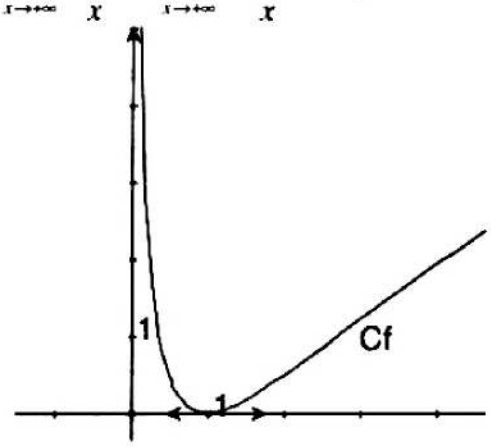
1) $f(x)=(Lnx)^2$

* $D_f=]0,+\infty[$

* $f'(x)=\dfrac{2}{x}Lnx$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(Lnx)^2}{x}=0$



2) $f(x)=\dfrac{1}{Lnx}$

$D_f=]0,+\infty[\setminus\{1\}$

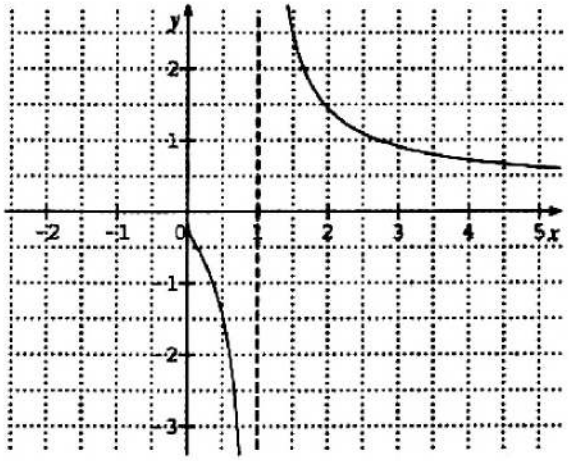
$f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}}{Ln(x)^2}=\dfrac{-1}{x(Lnx)^2}<0$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	-	‖	-	
f(x)	‖	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{Lnx}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{Lnx}=0$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{Lnx}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{Lnx}=-\infty$

Les droites d'équations $x=0$, $x=1$ *et* $y=0$
Sont des asymptotes à (Cf)



3) $f(x)=Ln(Lnx)$

$D_f=]1,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{1}{xLnx}>0$

x	1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

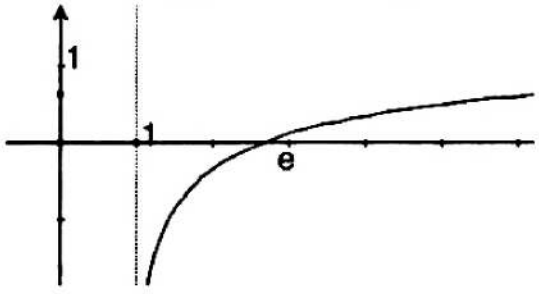
$\lim\limits_{x\to1^+}Ln(\underbrace{Lnx}_{0^+})=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}Ln(\underbrace{Lnx}_{+\infty})=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln(Lnx)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\dfrac{Lnx}{x}\right)}_{0}\underbrace{\left(\dfrac{Ln(Lnx)}{Lnx}\right)}_{0}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln(Lnx)}{Lnx}\overset{X=Lnx}{=}\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{LnX}{X}=0$



4) $f(x)=Ln|x|+Ln(x^2-3)$

$D_f=]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$

$D_E=]\sqrt{3},+\infty[$ *car f est paire*

pour $x\in]\sqrt{3},+\infty[$

$f(x)=Lnx+Ln(x^2-3)$

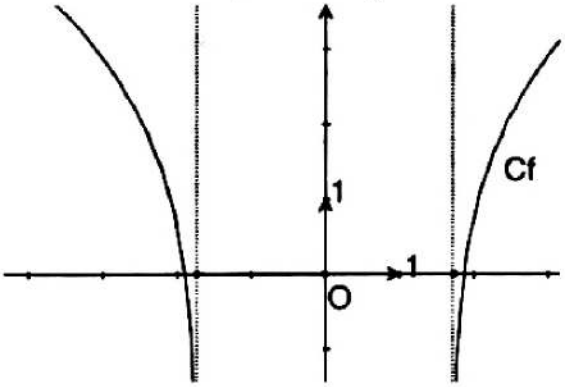
$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-3}>0$

x	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}+\frac{Ln(x^2-3)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}+\frac{Ln\left[x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{3Lnx}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{Ln\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{x}}_{0}=0$$



EX 9 :

$f(x)=2-x+\frac{Lnx}{x}$; $x\in]0,+\infty[$

1) $*\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-x+\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}\right)=-\infty$

$*\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2-x+\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{-\infty}\right)=-\infty$

2) $g(x)=1-x^2-Lnx$

a) $g'(x)=-\left(2x+\frac{1}{x}\right)<0;\ \forall x\in IR_+^*$

g est strictement décroissent sur $]0,+\infty[$

b) g(1)=0

x	0		1	$+\infty$
g(x)		+	0	-

3) $f'(x)=-1+\frac{1-Lnx}{x^2}$

$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

4)

a) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=0$

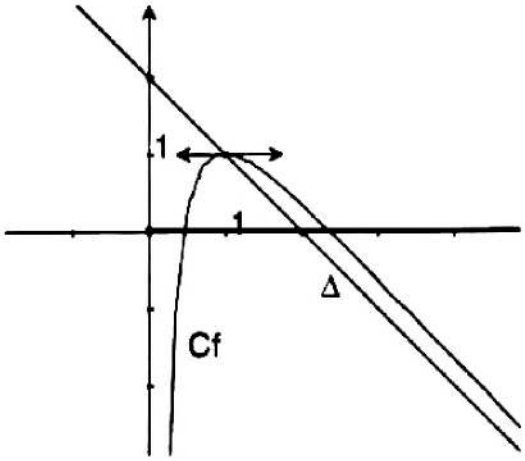
$\Delta: y=-x+2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

b) $f(x)-(-x+2)=\frac{Lnx}{x}$

x	0		1	$+\infty$
$f(x)-(-x+2)$		-	0	+
P.R		$\frac{\Delta}{(C)}$	(1,1)	$\frac{(C)}{\Delta}$

c) le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		1	$+\infty$
f'(x)		+	0	-
f(x)		$-\infty$	1	$-\infty$



EX 10 :

$f(x)=(Lnx)^2-3Lnx+2$

1) $D_f=]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{2}{x}Lnx-\frac{3}{x}$

$f'(x)=\frac{1}{x}[2Lnx-3]$

x	0		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	||	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{Lnx}_{-\infty}\left[\underbrace{Lnx-3}_{-\infty}\right]+2\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{Lnx}_{+\infty}\left[\underbrace{Lnx-3}_{+\infty}\right]+2\right)=+\infty$$

2)

$*f(x)=0\Leftrightarrow(Lnx)^2-3Lnx+2=0$

On pose $X=Lnx$

L'équation devient : $X^2-3X+2=0$

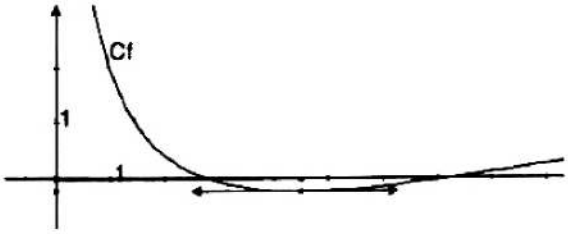
$X'=1$ et $X''=2$

$x'=e$ et $x''=e^2$

$(Cf)\cap(o,\vec{i})=\{A(e,0);B(e^2,0)\}$

$$*\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{(Lnx)^2}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{3Lnx}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}=0$$

B.P de direction celle de $(o,\vec{i})$



3) F est dérivable sur $]0,+\infty[$

Et

$F'(x)=(Lnx)^2+2Lnx-5(Lnx+1)+7$

$F'(x)=f(x)$

D'où F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

4) $A=-\int_e^{e^2} f(x)dx$

$$A=\int_{e^2}^{e} f(x)dx$$

$A=[F(x)]_{e^2}^{e}$

$\boxed{A=e(3-e)}$ U.a

EX 11 :

1) $Ln|x|<1\Leftrightarrow$

$0<|x|<e\Leftrightarrow$

$0<x<e$ ou $-e<x<0$

$S_{IR}=]-e,0[\cup]0,e[$

2)

$$F(x)=\begin{cases}2x-xLn|x| & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

a) $D_f=IR$

*<u>Continuité :</u> f est continue sur IR^*

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x - \underbrace{xLnx}_{0}) = 0 = f(0)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x - xLn(-x))$

$\underline{X=-x}\quad \lim_{x\to 0^+}(-2X + \underbrace{XLnX}_{0}) = 0 = f(0)$

f est continue sur tout IR

*<u>Dérivabilité :</u> f est dérivable sur IR^*

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}(2 - Lnx) = +\infty$

f n'est pas dérivable en 0.

b) $*\forall x \in D_f = IR$ on a $(-x) \in D_f$

$*pour\ x \neq 0$

$f(-x) = 2(-x) - (-x)Ln|-x|$

$f(-x) = -f(x)$

$f(0) = 0$

D'où f est impaire

$D_E = [0, +\infty[$

$pour\ x > 0$

$f'(x) = 2 - (Ln|x| + 1)$

$f'(x) = 1 - Ln|x|$

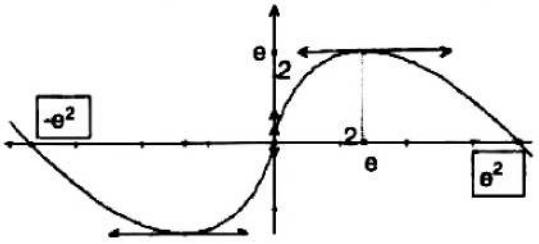
x	0		e		$+\infty$
f'(x)	|	+	0	-	
f(x)	0	↗	e	↘	$-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(2 - Lnx) = -\infty$

(C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 - Lnx = -\infty$

(C) admet au voisinage de $+\infty$ une B.I parabolique de direction celle de $(o, \vec{j})$



EX 12 :

$0 < a < b$

$f(x) = \frac{Ln(ax+1)}{Ln(bx+1)}$

1) $f(x)$ existe si seulement si

$ax+1 > 0\ et\ bx+1 > 0\ et\ bx+1 \neq 1$

$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{a}\ et\ x > -\frac{1}{b}\ et\ bx \neq 0$

$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{b}\ et\ x \neq 0$

$D_f = \left]-\frac{1}{b}, +\infty\right[\setminus \{0\}$

2) f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{b}, +\infty\right[\setminus \{0\}$

Comme quotient de deux fonctions dérivables.

$f'(x) = \frac{\frac{a.Ln(bx+1)}{ax+1} - \frac{b}{bx+1}Ln(ax+1)}{[Ln(bx+1)]^2}$

$f'(x) = \frac{a(bx+1)Ln(bx+1) - b(ax+1)Ln(ax+1)}{(ax+1)(bx+1)[Ln(bx+1)]^2}$

3)

$g(x) = a(bx+1)Ln(bx+1) - b(ax+1)Ln(ax+1)$

$g'(x) = ab.Ln(bx+1) + ab - baLn(ax+1) - ba$

$g'(x) = ab.[Ln(bx+1) - Ln(ax+1)]$

□ $pour\ x \in]0, +\infty[$

$a < b \Rightarrow ax < bx$

$\Rightarrow ax+1 < bx+1$

$\Rightarrow Ln(ax+1) < Ln(bx+1)$

$\Rightarrow g'(x) > 0$

□ $pour\ x \in \left]-\frac{1}{b}, 0\right[$

$a < b \Rightarrow ax > bx$

$\Rightarrow ax+1 > bx+1 \Rightarrow g'(x) < 0$

x		$-\frac{1}{b}$		0		$+\infty$
g'(x)	|		-	0	+	
g(x)	|	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

g admet 0 comme minimum absolu

$\Rightarrow g(x)\geq 0;\forall x\in \left]-\frac{1}{b},+\infty\right[$

$f'(x)=\frac{g(x)}{(ax+1)(bx+1)\left[Ln(bx+1)\right]^2}$

Le signe de f'(x) est celui de g(x)

$\forall x\in \left]-\frac{1}{b},0\right[, g(x)>0$

f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{b},0\right[$

de même f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)<f\left(\frac{1}{b}\right)$

Car f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \frac{Ln2}{Ln\left(\frac{b}{a}+1\right)}>\frac{Ln\left(\frac{a}{b}+1\right)}{Ln2}$

$\Rightarrow (Ln2)^2>Ln\left(\frac{a}{b}+1\right).Ln\left(\frac{b}{a}+1\right)$

EX 13 :

1) $U(x)=Lnx-\frac{x-1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}U(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(Lnx-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to 0^+}U(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\underbrace{xLnx}_{0}-x+1\right]=+\infty$

$U'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

x	0		1		+∞
U'(x)	‖	-	0	+	
U(x)	‖	+∞ ↘	0	↗ +∞	

$*V(x)=x-1-Lnx$

$\lim_{x\to 0^+}V(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}V(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}\right]$

$V'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

x	0		1		+∞
V'(x)	‖	-	0	+	
V(x)	‖	+∞ ↘	0	↗	+∞

2) * U admet 0 comme minimum absolu ⇨

$U(x)\geq 0;\forall x\in IR_+^*$

$\Rightarrow Lnx-\frac{x-1}{x}>,\forall x\in IR_+^*$

$\boxed{\Rightarrow \frac{x-1}{x}\leq Lnx}(1)$

* V admet 0 comme minimum absolu ⇨

$V(x)\geq 0,\forall x\in IR_+^*$

$\Rightarrow x-1-Lnx\geq 0;\forall x\in IR_+^*$

$\boxed{\Rightarrow Lnx\leq x-1}(2)$

(1)+(2)⇨ $\frac{x-1}{x}\leq Lnx\leq x-1;\forall x\in IR_+^*$

3) * pour $x=1+\frac{1}{n}$

$Lnx\leq x-1\Rightarrow Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$

$\Rightarrow n.Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq 1$

$\Rightarrow Ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\leq Lne$

$\boxed{\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e}(I)$

* pour $x=1-\frac{1}{n}>0$

$Lnx \le x-1 \Rightarrow$

$Ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \le -\frac{1}{n} \Rightarrow$

$-nLn\left(1-\frac{1}{n}\right) \ge 1 \Rightarrow$

$Ln\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right] \ge 1 \Rightarrow$

$Ln\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}\right] \ge Lne \Rightarrow$

$$\boxed{e \le \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}} (II)$$

$(I)+(II) \Rightarrow$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le e \le \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}}$$

EX 14 :

1) $t \ge 0$

$* \frac{1}{1+t}-(1-t)=\frac{t^2}{1+t} \ge 0$

$d'ou \boxed{1-t \le \frac{1}{1+t}} (1)$

$*\left(1-t+t^2\right)-\frac{1}{t+1}=\frac{t^3}{1+t} \ge 0$

$d'ou \boxed{\frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2} (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow 1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2 \quad pour\ t \ge 0$

2) $x \ge 0$

On a :

$1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2 \ ; \ \forall t \in [0,x]$

D'où

$$\int_0^x (1-t)dt \le \int_0^x \frac{dt}{1+t} \le \int_0^x \left(1-t+t^2\right)dt$$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x \le \left[Ln|1+t|\right]_0^x \le \left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{2}x^2 \le Ln(1+x) \le x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

3)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{Ln(1+x)}{x} & si\ x>0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$$

a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivable $(x \ne 0)$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{Ln(1+x)}{x}=1=f(0)$

d'où f est continue à droite en 0.

c) pour $x>0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}$$

D'après 2)

$$-\frac{x^2}{2} \le Ln(1+x)-x \le -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{Ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

D'où

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$$

f est dérivable à droite en 0 et

$f'_d(0)=-\frac{1}{2}$

EX 15 :

1) $f(x)=Lnx$

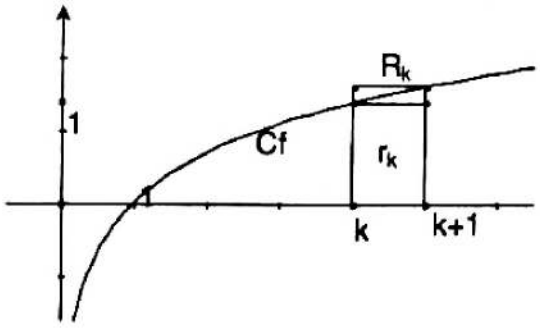
$D_f = IR_+^*$

$f'(x)=\frac{1}{x}>0\ ;\ \forall x\in IR_+^*$

x	0		+∞
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖	↗	+∞
	‖	−∞	

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=0$

B.I .Parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$



2) $S_n = Ln1+Ln2+.....+Ln(n)$

$T_n = Ln1+Ln2+.....+Ln(n-1)$

En utilisant la méthode des rectangles

$aire(r_k)\le\int_k^{k+1}Lnxdx\le aire(R_k)$

(Voir figure)

$\Rightarrow Lnk\le\int_k^{k+1}Lnxdx\le Ln(k+1)$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}Lnk\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}Lnxdx\le\sum_{k=1}^{n-1}Ln(k+1)$

$\Rightarrow T_n\le\int_1^n Lnxdx\le S_n$

3)

$* S_n = Ln(1\times2\times3\times.....\times n)$

$S_n = Ln(n!)$

$T_n = Ln\left[(n-1)!\right]$

$\int_1^n Lnxdx=\left[xLnx-x\right]_1^n$

$=nLn-n+1$

D'après 2)

$\boxed{Ln\left[(n-1)!\right]\le nLn-n+1\le Ln(n!)}\ (I)$

$* nLnn-n+1=Ln(n^n)-Ln(e^n)+Lne$

$=Ln\left(\frac{n^n}{e^n}\right)+Lne$

$=Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

D'après (I) :

$Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]\le Ln(n!)$

$\Rightarrow\boxed{e.\left(\frac{n}{e}\right)^n\le n!}\ (1)$

$* Ln\left[(n-1)!\right]\le Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow Ln\left[(n-1)!\right]+Lnn\le Lnn+Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow Ln(n!)\le Ln\left[ne\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow\boxed{n!\le ne\left(\frac{n}{e}\right)^n}\ (2)$

$(1)+(2)\Rightarrow$

$e\left(\frac{n}{e}\right)^n\le n!\le ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$

EX 16 :

$f(x)=(x+1).Ln|x-3|$

1) $D_f = IR\setminus\{3\}$

2)

a) $f'(x)=Ln|x-3|+(x+1).\frac{1}{x-3}$

$f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+Ln|x-3|$

b) $f''(x)=\frac{-4}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}$

$f''(x)=\frac{x-7}{(x-3)^2}$

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$
f'(x)	-	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $2+Ln4$		↗ $+\infty$

c) f' est continue et strictement decroissante sur $]-\infty,3[$, elle réalise donc une bijection de $]-\infty,3[$ sur IR

comme $0 \in IR$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty,3[$ tel que $f'(\alpha)=0$

$f'(0).f'(1)<0 \Rightarrow 0<\alpha<1$

$f'(0,7).f'(0,8)<0 \Rightarrow 0,7<\alpha<0,8$

x	$-\infty$	α	3
f'(x)	+	0	-

d) f' admet $(2+Ln4)$ comme minimum absolu sur $]3,+\infty[$

$\Rightarrow f'(x) \geq 2+Ln4$

$\Rightarrow f'(x)>0; \forall x \in]+3,+\infty[$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)Ln|x-3| = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+3} f(x) = \lim\limits_{x\to+3}(x+1)Ln|x-3| = -\infty$

$x=+3$ est une asymptote à (Cf)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)Ln|x-3| = +\infty$

4) $f(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \; ou \; |x-3|=1$

$\Leftrightarrow x=-1 \; ou \; x-3=1 \; ou \; x-3=-1$

$\Leftrightarrow x=-1 \; ou \; x=4 \; ou \; x=2$

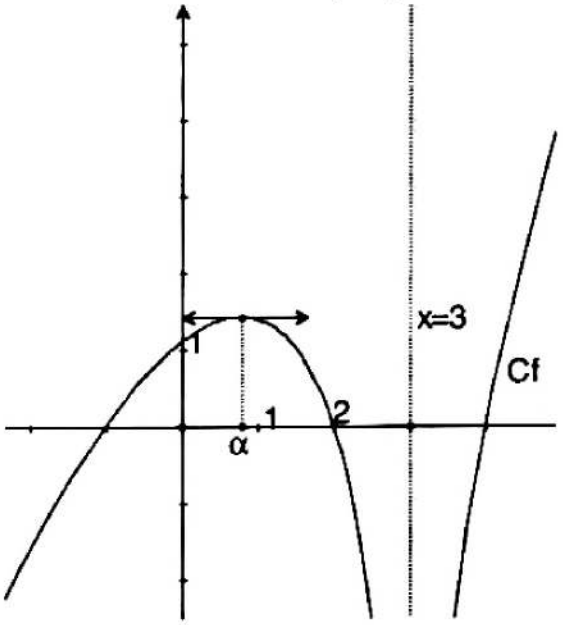
$(Cf)\cap\left(o,\vec{i}\right)=\{A(-1,0);B(2,0);C(4,0)\}$

5)

x	$-\infty$	α	3	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	↗ $-\infty$	$f(\alpha)$ ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

$\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

B.P de direction celle de $\left(o,\vec{j}\right)$



EX 17 :

$f(x) = -\dfrac{x}{2} + Ln\dfrac{|x-1|}{x}$

1) $D_f = IR^* \setminus \{1\}$

2) $f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)'}{\dfrac{x-1}{x}}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x(x-1)}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$

$-x^2+x+2=0$

$x'=-1 \; et \; x''=2$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	-	+ 0	-
f(x)	$+\infty$ ↘	$+\infty$ ↗ ½+Ln(2)	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↗ $-\infty$	↗ $-1-Ln(2)$	↘ $-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}Ln\left|\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{1}\right|=0$

D'où $\Delta: y=-\frac{x}{2}$ est une asymptote à (C)

$* f(x)+\frac{x}{2}=Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=Ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$

• *pour* $x<0\to\left|1-\frac{1}{x}\right|>1\Rightarrow Ln(\left|1-\frac{1}{x}\right|)>0$

$\Rightarrow f(x)+\frac{x}{2}>0$

• *pour* $0<x<\frac{1}{2}\to\left|1-\frac{1}{x}\right|>1\Rightarrow Ln(\left|1-\frac{1}{x}\right|)>0$

$\Rightarrow f(x)+\frac{x}{2}>0$

• *pour* $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\setminus\{1\}\to\left|1-\frac{1}{x}\right|<1$

$\Rightarrow Ln\left|1-\frac{1}{x}\right|<0\Rightarrow f(x)+\frac{x}{2}<0$

x	$-\infty$	0		1/2	1		$+\infty$
$f(x)+\frac{x}{2}$	+	|	+	-	|		-
P.R	$\frac{(C)}{\Delta}$	|	$\frac{(C)}{\Delta}$	$\frac{\Delta}{(C)}$	|		$\frac{\Delta}{(C)}$

Point D'intersection

4) pour $x\in D_f=IR^*\setminus\{1\}$

On a : $x\neq 0\ et\ x\neq 1$

$\Rightarrow -x\neq 0\ et\ -x\neq -1$

$\Rightarrow 1-x\neq 1\ et\ 1-x\neq 0$

$\Rightarrow (1-x)\in D_f$

$* f(1-x)+f(x)=\frac{x-1}{2}+Ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|-\frac{x}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$=-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$=-\frac{1}{2}+Ln\left|\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)\right|$

$=-\frac{1}{2}+Ln1$

$=-\frac{1}{2}=2\left(-\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow f(1-x)=2\left(-\frac{1}{4}\right)-f(x)$

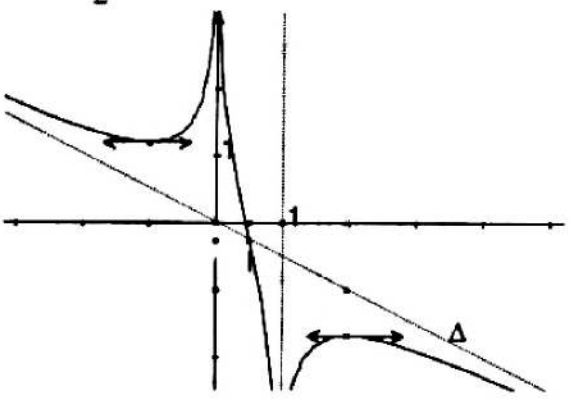
D'où

$I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour (C)

5)

$* x=0\ et\ x=1$ sont des asymptotes à (C)

$*\Delta: y=-\frac{x}{2}$ asymptote à (C)



6) * Sur $]-\infty,0[$ f admet $\left(\frac{1}{2}+Ln2\right)$ comme minimum absolue

$\Rightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}+Ln2;\forall x\in\ ]-\infty,0[$

D'où l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]-\infty,0[$

* de même l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]1,+\infty[$

* f est continue est strictement décroissante sur $]0,1[$

$\Rightarrow f$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur IR

Comme $0\in IR$ alors il existe un unique réel

$x_0\in]0,1[\ tq : f(x_0)=0$

$f\left(\frac{2}{5}\right).f\left(\frac{9}{2}\right)=.....<0$

$\Rightarrow \frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{2}$

Conclusion :

L'équation $f(x)=0$ admet x_0 comme unique solution dans $IR^*\setminus\{1\}$.

EX 18 :

A)

1) $g(x)=(1-x).Lnx \qquad x\in IR_+^*$

$g(x)=0\Leftrightarrow 1-x=0$ *ou* $Lnx=0$

$\Leftrightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
g(x)	|	-	0	-	

2) $h(x)=Lnx-x$

a) $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
h'(x)	|	+	0	-	
h(x)	|	$-\infty$ ↗	-1	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(Ln(x)-x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}-1\right]=-\infty$

b) h admet (-1) comme maximum absolu

$\Rightarrow h(x)\le -1;\ \forall x\in IR_+^*$

D'où $h(x)<0;\ \forall x\in IR_+^*$

B)

$f(x)=Lnx.(Lnx-x)$

1) f est dérivable sur IR_+^* comme étant produit de deux fonctions dérivables

$f'(x)=\frac{1}{x}(Ln-x)+Lnx\left(\frac{1}{x}-1\right)$

$f'(x)=\frac{(Lnx-x)+(1-x)Lnx}{x}$

$f'(x)=\frac{g(x)+h(x)}{x}$

2) $f'(x)<0$ car $g(x)\le 0$ *et* $h(x)<0$

x	0		$+\infty$
f'(x)	|	-	
f(x)	|	$+\infty$ ↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\underbrace{Lnx}_{-\infty}\left(\underbrace{Lnx-x}_{-\infty}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x.Lnx}_{+\infty}\left[\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}-1\right]=-\infty$

3) * $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote à (Cf)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{Lnx}_{+\infty}\left[\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}-1\right]=-\infty$

(Cf) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $\left(o,\vec{j}\right)$ au voisinage de $(+\infty)$.

4)

a) on a :

$f(1)=0$

f est continue et strictement décroissante sur IR_+^*, d'où

$(Cf)\cap\left(o,\vec{i}\right)=\{B(1,0)\}$

b) $T : y=f'(1).(x-1)+f(1)$

$T : y=-x+1$

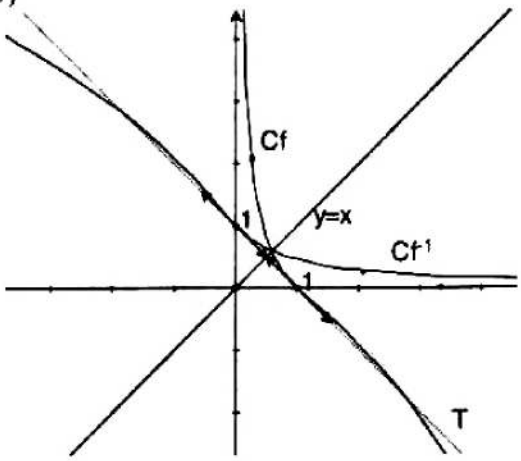
c) $*f(e)=-e+1$

$\Rightarrow A(e,-e+1)\in(Cf)$

$*A\in T$

D'où $A\in T\cap(Cf)$

5)



6) $\alpha\in\,]0,1[$

a) $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}f(x)dx$

$A(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}Lnx(Lnx-x).dx$

Soit :

$$\begin{cases}U'(x)=Lnx-x\rightarrow U(x)=xLnx-x-\dfrac{x^2}{2}\\ V(x)=Lnx\rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$A(\alpha)=\left[xLn^2x-\left(x+\frac{x^2}{2}\right).Lnx\right]_{\alpha}^{1}$$

$$-\int_{\alpha}^{1}\left(Lnx-1-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$A(\alpha)=\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)Ln\alpha-\alpha.(Ln\alpha)^2$$

$$-\left[xLnx-x-x-\frac{x^2}{4}\right]_{\alpha}^{1}$$

$$A(\alpha)=\left(2\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right).Ln\alpha-\alpha(Ln\alpha)^2-\frac{\alpha^2}{4}-2\alpha+\frac{9}{4}$$

b)

$$\lim_{\alpha\to0^+}\left(2\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)Ln\alpha=\lim_{\alpha\to0^+}2\alpha Ln\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2.Ln\alpha=$$

$$\lim_{\alpha\to0^+}\alpha(Ln\alpha)^2=0$$

D'où $\lim_{\alpha\to0^+}A(\alpha)=\frac{9}{4}$

7)a) f est continue et strictement décroissante sur IR_+^* elle réalise donc une bijection de IR_+^* sur $f(IR_+^*)=IR$.

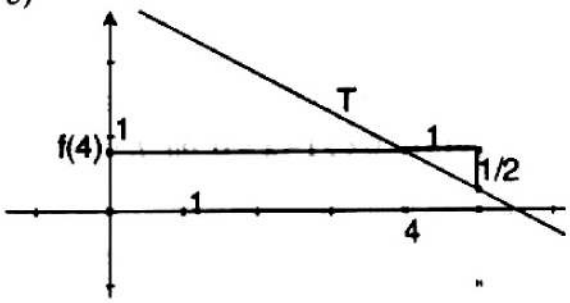
b) $(Cf-1)=S_{\Delta}(Cf)$ avec $\Delta: y=x$

EX 19 :

1)

a) $f(3)=1$ *et* $f'(3)=0$

b)



2)

a) $\lim_{x\to2^+}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

b)

x	2		3	+∞
f'(x)	‖	+	0	-
f(x)	‖ -∞	↗	1	↘ -∞

3) $f(x)=ax+b+Ln(x+c)$

$f'(x)=a+\dfrac{1}{x+c}$

$$\begin{cases} f'(3)=0 \\ f'(4)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{3+c}=0 \\ a+\frac{1}{4+c}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-2 \end{cases}$$

D'où

$f(x)=-x+b+Ln(x-2)$

$f(3)=1 \Rightarrow -3+b=1$

$\Rightarrow \boxed{b=4}$

D'où

$f(x)=-x+4+Ln(x-2)$

4) $X=x-2$

$* \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-X+2+LnX)$

$$=\lim_{x\to+\infty} X.\left[\underbrace{-1+\frac{2}{X}+\frac{LnX}{X}}_{0}\right]=-\infty$$

$$* \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{4}{x}+\frac{Ln(x-2)}{x}\right)=-1$$

$* \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=+\infty$

(Cf) admet une B.I de direction asymptotique celle de : $\Delta: y=-x$

5)

a) $\Delta: y=-x+4$

b) $f(x)-(-x+4)=Ln(x-2)$

$Ln(x-2)=0 \Leftrightarrow x=3$

x	2	3	+∞
$f(x)-(-x+4)$	-	0	+
P.R	$\frac{\Delta}{(C)}$	(3,1)	$\frac{(C)}{\Delta}$

6) $g(x)=f(x)$ *pour* $x\in]2,3]$

a) g est continue et strictement croissante sur $]2,3] \Rightarrow g$ est bijective de $]2,3]$ sur $J=g(]2,3])=]-\infty,1]$

b) $(Cg-1)=S_{\delta}(Cg)$

avec $\delta: y=x$

c) $(Cg-1)$ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 1 d'où g-1 n'est pas dérivable à gauche en 1.

EX 20 :

A/

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{Lnx}$$

$D_f=]0,+\infty[\setminus\{1\}$

1)

$$* \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}+\underbrace{\frac{1}{Lnx}}_{0}=+\infty$$

$$* \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\underbrace{\frac{1}{x}}_{1}+\underbrace{\frac{1}{Lnx}}_{-\infty}=-\infty$$

$* \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{Lnx}}_{0}=0$$

Les droites d'équation $x=0$; $x=1$; *et* $y=0$ sont des asymptotes à (Cf)

2)

a) les fonctions $x\mapsto x$ *et* $x\mapsto Lnx$ sont dérivables et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ d'où f est dérivable.

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{-\frac{1}{x}}{(Lnx)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(Lnx)^2}$$

b) $f'(x)<0 ; \forall x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$

x	0		1		+∞
f'(x)	‖	-	‖	-	
f(x)	‖	+∞ ↘ −∞	‖	+∞ ↘ 0	

3) $h(x)=f(x)$ *pour* $x\in\,]0,1[$

a) h est continue est strictement décroissante sur $]0,1[$ elle réalise donc une bijective de $]0,1[$ sur

$J=h(]0,1[)=IR$

b) h est une bijection de $]0,1[$ sur IR comme $0\in IR$ alors il existe un unique réel α de $]0,1[$ tel que $h(\alpha)=0$

$h(0,5).h(0,6)=(+)(-)<0$

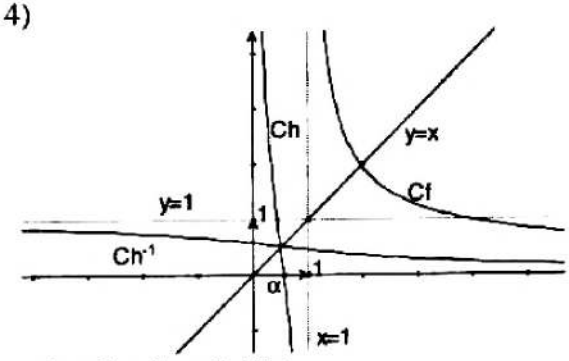
D'où $0,5<\alpha<0,6$

c) $f(]1,+\infty[)=]0,+\infty[$

$0\notin\,]0,+\infty[$ d'où l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]1,+\infty[$ d'où

$(Cf)\cap(o,\vec{i})=\{A(\alpha,0)\}$

4)



5) $(C_h-1)=S_{\Delta}(C_h)$

avec $\Delta: y=x$

x	$-\infty$		$+\infty$
(h-1)'(x)		-	
h(x)	1	↘	0

6)

a) $h'(\alpha)=f'(\alpha)=\dfrac{-1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\alpha(Ln\alpha)^2}$

$h(\alpha)=0\Rightarrow\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{Ln\alpha}=0$

$\Rightarrow\boxed{Ln\alpha=-\alpha}$

D'où

$h'(\alpha)=\dfrac{-1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\alpha^3}=-\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha^3}\right)$

b) $h^{-1}(0)=\alpha$ *car* $h(\alpha)=0$

h est dérivables en α et

$h'(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha^3}\right)\neq 0$

D'où h^{-1} est dérivable en 0 et

$\left(h^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{h'(\alpha)}=\dfrac{-\alpha^3}{1+\alpha}$

B/

$g(x)=2.f(x^2)\qquad x\in\,]1,+\infty[$

1)

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Lnx}-2f(x^2)$

$=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Lnx}-2\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{Ln(x^2)}\right]$

$=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Lnx}-2\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2Lnx}\right]$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$

2) $f(x)-g(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$

x	1		2	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	‖	-	0	+
P.R	‖	$\dfrac{(Cg)}{(Cf)}$	$(2,f(2))$	$\dfrac{(Cf)}{(Cg)}$

3) $x\in[2,+\infty[$

$MN=f(x)-g(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$

Soit $\zeta(x)=\dfrac{x-2}{x^2}\qquad x\in[2,+\infty[$

$\zeta'(x)=\dfrac{4-x}{x^3}$

x	2		4		$+\infty$
$\zeta'(x)$	‖	+	0	-	
$\zeta(x)$	‖ 0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0

$MN=\zeta(x)$ est maximale pour $x=4$

EX 21 :

A/

$g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-Lnx$

1) $g'(x)=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}-\dfrac{1}{x}<0$

$\forall x\in\ ]0,+\infty[$

g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

2) g est continue est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur

$g\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{+\infty} g,\lim\limits_{0^+} g\right[=]-\infty,+\infty[=IR$

Comme $0\in IR$ alors il existe un unique réel α de $]0,+\infty[$ tel que

$g(\alpha)=0$

$g(1).g(2)<0\Rightarrow 1<\alpha<2$

.

.

.

calculatrice

$1,8<\alpha<1,9$

3)

x	0		α		$+\infty$
g(x)	|	+	0	-	

$x>\alpha\Rightarrow g(x)<g(\alpha)$

Car g est strictement décroissante

$\Rightarrow g(x)<0$

B/

$f(x)=\dfrac{2Lnx}{x^2+x}$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2Lnx}{x^2+x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)\left(\dfrac{Lnx}{x}\right)=0$

2) $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}.g(x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

3)

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	|	+	0	-	
f(x)	|	↗	$f(\alpha)$	↘	0
	$-\infty$				

$f(\alpha)=\dfrac{2Ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$

Or

$g(\alpha)=0\Rightarrow\boxed{Ln\alpha=\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}}$

D'où

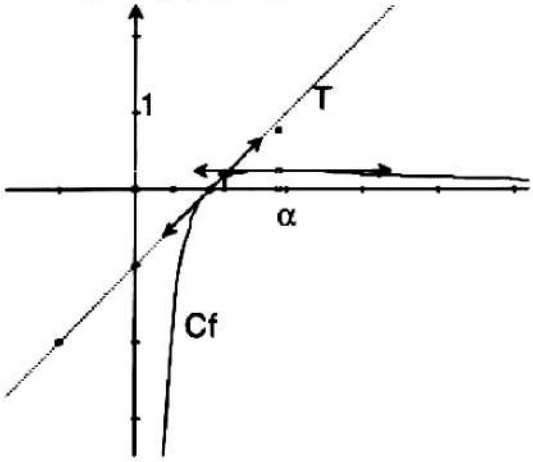
$f(\alpha)=\dfrac{2\left(\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right)}{\alpha^2+\alpha}=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4) $*x=0$ *et* $y=0$ sont des asymptotes à (C)

$*T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$T: y=x-1$

$*\alpha\ \square\ 1,8\rightarrow f(\alpha)\ \square\ 0,3$



C/1) a) $u(x)=\dfrac{Lnx}{x}$

$U(x)=\dfrac{1}{2}(Ln)^2$ est une primitive de u sur $]0,+\infty[$

b) pour $x\geq 1\ \dfrac{2}{1+x}\leq 1\Rightarrow\dfrac{2}{1+x}.\dfrac{Lnx}{x}\leq\dfrac{Lnx}{x}$

(Car $Lnx\geq 0$) $\Rightarrow f(x)\leq\dfrac{Lnx}{x}$

2)

$$\begin{cases} F'(x)=f(x) \;;\; \forall x\in[1,+\infty[\\ F(1)=0 \end{cases}$$

On a : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

$f(t)\le\frac{Lnt}{t}\;;\;\forall t\in[1,x]$

$\Rightarrow\int_1^x f(t)dt\le\int_1^x\frac{Lnt}{t}dt$

$\Rightarrow F(x)\le\left[\frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_1^x$

$\Rightarrow F(x)\le\frac{1}{2}(Lnx)^2$

$\forall x\in[1,+\infty[$

EX 22 :

$x\in[0,+\infty[$

$f(x)=Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

1)

a) $f'(x)=\dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=[f(t)]_0^1=Ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

2) $f'(x)>0$

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

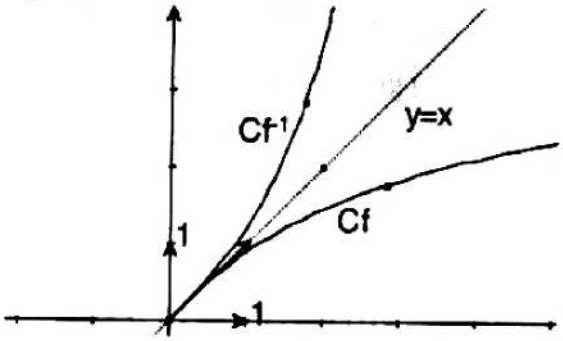
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}Ln\underbrace{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}_{+\infty}=+\infty$

$*\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\left[x\left(1+\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}\right)\right]}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{Ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}}_{0}=0$

B.I de direction parabolique celle de $(o,\vec{i})$

$*f'(0)=1$



3)

a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=[0,+\infty[$

b) $(Cf-1)=S_\Delta(Cf)$

$\Delta: y=x$

c) $I=\int_0^1 Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$$\begin{cases} U'(x)=1\xrightarrow{p}U(x)=x \\ V(x)=f(x)\xrightarrow{d}V'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$I=[x.f(x)]_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$I=f(1)-\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$

$I=Ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\boxed{I=Ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}}$

$*\int_0^1 Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x=0$ et $x=1$

$*\int_0^{Ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx = \int_0^{f(1)} f^{-1}(x)dx$

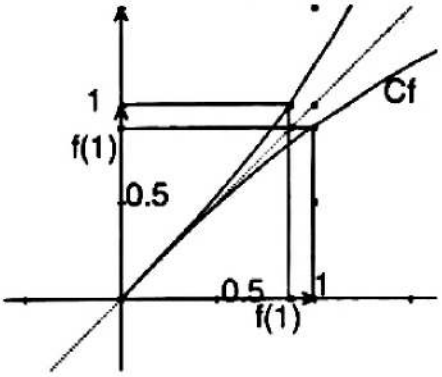
Représente l'aire de la partie du plan limitée par $(Cf-1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation :
$x=0$ et $x=f(1)$

D'où

$$\int_0^{Ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx = 1.f(1) - \int_0^1 Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$

$$= Ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(Ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}-1$$



EX 23 :

$$I_p = \int_1^e x^2 (Lnx)^p dx \; ; \; p \geq 1$$

1)

a) $I_{p+1} = \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} dx$

pour $1 \leq x \leq e$

$\Rightarrow 0 \leq Lnx \leq 1$

$\Rightarrow x^2 (Lnx)^{p+1} \leq x^2 (Lnx)^p$

$\Rightarrow \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} dx \leq \int_1^e x^2 (Lnx)^p dx$

$\Rightarrow I_{p+1} \leq I_p$

D'où (I_p) est décroissante.

b) $I_{p+1} = \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} dx$

soit :

$$\begin{cases} U'(x) = x^2 \rightarrow U(x) = \dfrac{x^3}{3} \\ V(x) = (Lnx)^{p+1} \rightarrow V'(x) = \dfrac{p+1}{x}(Lnx)^p \end{cases}$$

$$I_{p+1} = \left[\frac{x^3}{3}(Lnx)^{p+1}\right]_1^e - \frac{p+1}{3}.\int_1^e x^2 (Lnx)^p dx$$

$$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3}.I_p$$

D'où :

$$I_{p+1} + \frac{p+1}{3}.I_p = \frac{e^3}{3}$$

c) $I_1 = \int_1^e x^2.Lnx\, dx$

$x^2 \xrightarrow{p} \dfrac{x^3}{3}$

$Lnx \xrightarrow{d} \dfrac{1}{x}$

$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3}Lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx$$

$$I_1 = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{9}\left(1+2e^3\right)}$$

$$*I_2 + \frac{2}{3}I_1 = \frac{e^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{1}{27}\left(5e^3-2\right)}$$

2)

a) (I_p) décroissante

$\Rightarrow I_{p+1} \le I_p$

$\Rightarrow I_{p+1} + \frac{p+1}{3} I_p \le I_p + \frac{p+1}{3} I_p$

$\Rightarrow \frac{e^3}{3} \le \frac{p+4}{3} I_p$

$\Rightarrow \boxed{\frac{e^3}{p+4} \le I_p}$ (1)

* pour $p \ge 2$

On a : $I_p + \frac{p}{3} I_{p-1} = \frac{e^3}{3}$

D'après 1)b)

$I_p \le I_{p-1}$ *car* I_p □

$\Rightarrow \frac{p}{3} I_p \le \frac{p}{3} I_{p-1}$

$\Rightarrow I_p + \frac{p}{3} I_p \le I_p + \frac{p}{3} I_{p-1}$

$\Rightarrow \frac{p+3}{3} I_p \le \frac{e^3}{3}$

$\Rightarrow I_p \le \frac{e^3}{p+3}$

□ pour $p = 1$; $I_p = \frac{1}{9}\left(1 + 2e^3\right) \le \frac{e^3}{4}$

D'où $\boxed{I_p \le \frac{e}{p+3}}$ (2) ; *pour* $p \ge 1$

(1)+(2) $\Rightarrow \frac{e^3}{p+4} \le I_p \le \frac{e^3}{p+3}$

b) $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{e^3}{p+4} = \lim\limits_{p \to +\infty} \frac{e^3}{p+3} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{p \to +\infty} I_p = 0$

* $\frac{p}{p+4} . e^3 \le p . I_p \le \frac{p}{p+3} . e^3$

$\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{p}{p+4} e^3 = \lim\limits_{p \to +\infty} \frac{p}{p+3} e^3 = e^3$

D'où $\lim\limits_{p \to +\infty} p . I_p = e^3$

EX 24 :

$f(x) = Ln(Lnx)$

1) $D_f =]1, +\infty[$

2) la fonction : $x \mapsto Lnx$ est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$

D'où f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{(Lnx)'}{Lnx} = \frac{1}{x.Lnx}$

3) $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k.Lnk}$; $x \ge 2$

$k \ge 2$

$k \le t \le k+1 \Rightarrow 0 \le Lnk \le Lnt$

$\Rightarrow 0 \le kLnk \le t.Lnt$

$\Rightarrow \frac{1}{tLnt} \le \frac{1}{k.Lnk}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k.Lnk} dt$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t.Lnt} dt \le \frac{1}{k.Lnk}$

4) * $\int_2^{n+1} \frac{1}{tLnt} dt$

$= \int_2^{n+1} f'(t) dt = \left[f(t)\right]_2^{n+2}$

$= Ln\left(Ln(n+2)\right) - Ln(Ln2)$

* $\int_{(k)}^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \le \frac{1}{kLnk}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \le \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{kLnk}$

$\Rightarrow \int_2^{n+1} \frac{1}{tLnt} dt \le S_n$

$\Rightarrow S_n \ge Ln\left(Ln(n+2)\right) - Ln(Ln2)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} Ln\left(Ln(n+2)\right) - Ln(Ln2) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

EX 25 :

Pour $x \in IR_+$

1) on pose : $U(x) = x - Ln(1+x)$

$U'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$

U est croissante sur IR_+

$x \geq 0 \Rightarrow U(x) \geq U(0)$

$\Rightarrow U(x) \geq 0$

$\Rightarrow x - Ln(1+x) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{Ln(1+x) \leq x}(1)$

* soit pour $x \geq 0$

$V(x) = Ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$

$V'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$

$V(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$

V est croissante sur IR_+

$x \geq 0 \Rightarrow V(x) \geq V(0)$

$\Rightarrow Ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{x - \frac{x^2}{2} \leq Ln(1+x)}(2)$

$(1)+(2) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq Ln(1+x) \leq x$

2)

a) $w_p = p$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$

$\sum_{p=1}^{n} p = \sum_{n=1}^{n} w_p = \frac{n}{2}(w_1 + w_n) = \frac{n(n+1)}{2}$

* démonstration par récurrence

_ pour $n = 1$

$\sum_{p=1}^{1} p^2 = 1 = \frac{1*2*3}{6}$ $(vrai)$

_ supposons que $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que

$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$

$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Conclusion :

$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in IN^*$

b)

$Ln(P_n) = Ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + Ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \ldots$

$\ldots + Ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

$Ln(P_n) = \sum_{p=1}^{n} Ln\left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$

d'après 1)

$\frac{p}{n^2} - \frac{p^2}{2n^4} \leq Ln\left(1 + \frac{p}{n^2}\right) \leq \frac{p}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{4n^4} \leq Ln(P_n) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p - \frac{1}{4n^4}\sum_{p=1}^{n} p^2 \leq Ln(P_n) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{1}{4n^4}\cdot\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

$\leq Ln(P_n) \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^3} \leq Ln(P_n) \leq \frac{n+1}{2n}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^3} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} Ln(P_n) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

EX 26 :

$f_a(x) = Ln(x^2 + a)$

1)

a) 1er cas : $a > 0$

$D_{f_a} = IR$

2eme cas : a=0

$D_{f_0} = IR^*$

3eme cas : $a < 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-a}$		$\sqrt{-a}$	$+\infty$
x^2+a	+	0	-	0	+	

$D_{f_a} =]-\infty, -\sqrt{-a}[\cup]\sqrt{-a}, +\infty[$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + a}$

1er cas : $a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a'(x)$	-	0	+		
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$Ln(a)$	↗	$+\infty$

2eme cas : a=0

$f_0(x) = Ln(x^2)$ $\quad f_0'(x) = \dfrac{2}{x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		-		+	
$f_0(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$	↗	$+\infty$

3eme cas : $a < 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-a}$		$\sqrt{-a}$		$+\infty$
$f_a'(x)$		-				+	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$		$-\infty$	↗	$+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_a(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ln(x^2+a)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ln\left[x^2\left(1+\dfrac{a}{x^2}\right)\right]}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ln(x^2) + Ln\left(1+\dfrac{a}{x^2}\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2\underbrace{\dfrac{Ln(x)}{x}}_{0} + \underbrace{\dfrac{Ln\left(1+\dfrac{a}{x^2}\right)}{x}}_{0} = 0$

(C_{f_a}) admet une B.I parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$

* f est paire d'où (C_{f_a}) admet un B.I parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$ au voisinage de $(-\infty)$

d) $a \neq a'$

$MM' = |f_a(x) - f_a'(x)|$

$= |Ln(x^2+a) - Ln(x^2+a')|$

$= \left|Ln\left(\dfrac{x^2+a}{x^2+a'}\right)\right|$

$\neq 0$

Car $\dfrac{x^2+a}{x^2+a'} \neq 1$

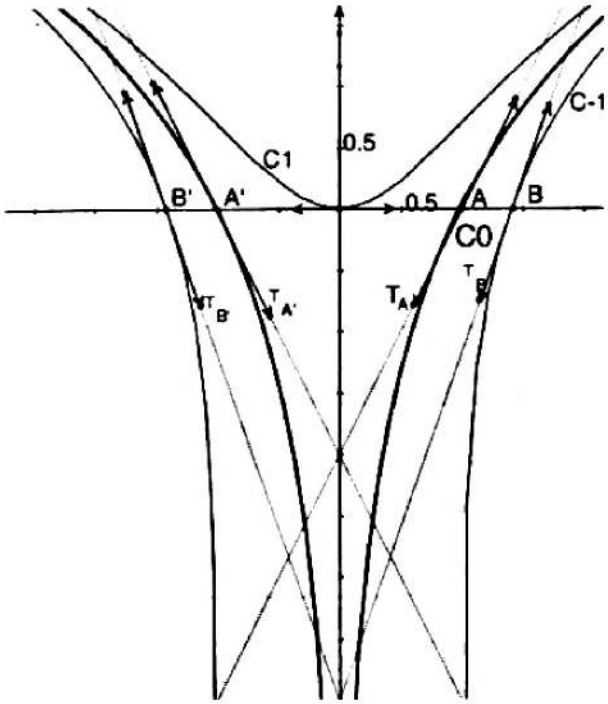
* (Ca) et (Ca') sont disjointes $(Ca \cap Ca' = \phi)$

* $MM' = \left|Ln\left(\dfrac{x^2+a}{x^2+a'}\right)\right|$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+a}{x^2+a'} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} MM' = 0$

e)



$*(C_1)\cap\left(o,\vec{i}\right)=\{o(0,0)\}$

$T_1 : y=0$

$*(C_0)\cap\left(o,\vec{i}\right)=\{A(-1,0);A'(1,0)\}$

$T_A : y=-2(x+1)$

$T_{A'} : y=2(x-1)$

$*(C_{-1})\cap\left(o,\vec{i}\right)=\left\{B(\sqrt{2},0);B'(-\sqrt{2},0)\right\}$

$T_B : y=2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

$T_{B'} : y=-2\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$

2) $a=\frac{3}{4}$ $\quad x\in IR_+$

$g(x)=x-Ln\left(x^2+\frac{3}{4}\right)$

a) $g'(x)=1-\frac{2x}{x^2+\frac{3}{4}}$

$g'(x)=\frac{x^2-2x+\frac{3}{4}}{x^2+\frac{3}{4}}$

$g'(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x^2+\frac{3}{4}}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'(x)	+	0		-	0	+	
g(x)	$Ln\frac{4}{3}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{2}-Ln3$	↗	$+\infty$

$g(x)>0$; $\forall x\in IR_+$

$\left(C_{\frac{3}{4}}\right)$ est au dessous de D.

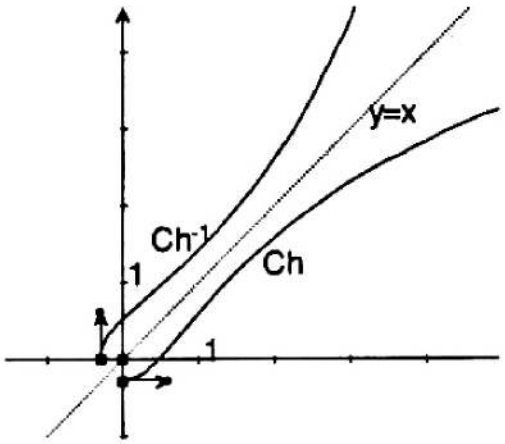
b) $h(x)=f_{\frac{3}{4}}(x)=Ln\left(x^2+\frac{3}{4}\right)$; $x\in IR_+$

$h'(x)=\frac{2x}{x^2+\frac{3}{4}}\geq 0$; $\forall x\in IR_+$

h est continue et strictement croissante sur IR_+ elle réalise une bijection de IR_+ sur

$h(IR_+)=\left[Ln\frac{3}{4},+\infty\right[$

c)



EXERCICE 27

A

$n \subset IN^*$

$f_n(x) = (x-1)^n . Lnx$

1) $\varphi_n(x) = n.Lnx + 1 - \frac{1}{x}$

a) $\varphi'_n(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

x	0		$+\infty$
$\varphi'_n(x)$		+	
$\varphi_n(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

b) $\varphi_n(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi_n(x)$		-	0	+	

2) a) pour $n = 1$

$f_1(x) = (x-1).Lnx$

$f_1'(x) = Lnx + 1 - \frac{1}{x} = \varphi_1(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Pour $n \geq 2$

$f_n'(x) = n(x-1)^{n-1}.Lnx + \frac{(x-1)^n}{x}$

$f_n'(x) = (x-1)^{n-1} . \varphi_n(x)$

1ier cas (n : impair)

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $\varphi_n(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		-	0	+	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2eme cas (n : pair)

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(x-1).\varphi_n(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0	+	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

b) $f_2(x) - f_1(x) = (x-1)^2.Lnx - (x-1).Lnx$

$= (x-1)(x-2).Lnx$

x	0		1		2		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		-	0	-	0	+	
P.R		C_1/C_2		C_1/C_2		C_2/C_1	
			(1,0)		(2, Ln2)		

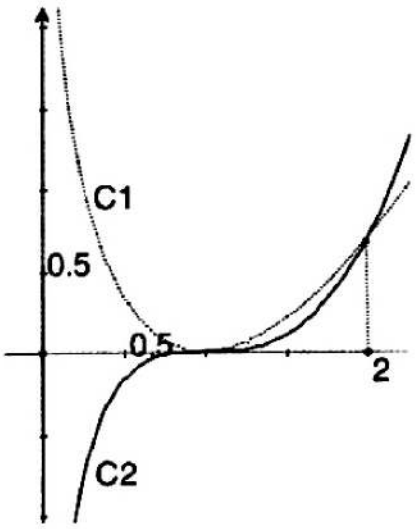
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x}) Ln'x$

$= +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} (\frac{x^2 - 2x + 1}{x}) Lnx = +\infty$

Branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$.



3) $\mathcal{A} = \int_1^2 (f_1(x) - f_2(x))\, dx$

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2).\, \mathrm{Ln}x\, dx$$

Soit

$$\begin{cases} U'(x) = -x^2+3x-2 \\ V(x) = \mathrm{Ln}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \\ V'(x) = 1/x \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \left[\left(\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right)\mathrm{Ln}x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{-x^2}{3} + \frac{3x}{2} - 2\right) dx$$

$$\mathcal{A} = -\frac{2}{3}\,\mathrm{Ln}2 - \left[\left(\frac{-x^3}{9} + \frac{3x^2}{4} - 2x\right)\right]_1^2$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{19}{36} - \frac{2}{3}\,\mathrm{Ln}2\right) \quad \text{u.a}$$

B) $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$; $n \in \mathbb{N}$

1) $U_n = \int_1^2 f_n(x)\, dx$

Soit $U_n = \int_1^2 (x-1)^n \mathrm{Ln}x\, dx$

$$\begin{cases} (x-1)^n \xrightarrow{P} \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1} \\ \mathrm{Ln}x \xrightarrow{d} \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$U_n = \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\mathrm{Ln}x\right]_1^2 - \frac{1}{n+1}\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\, dx$$

$$U_n = \frac{\mathrm{Ln}2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\, dx$$

D'où

$$(n+1)\,U_n = \mathrm{Ln}2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\, dx$$

2) pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) $\mathrm{Ln}2 - (n+1)\,U_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\, dx$

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x-1)^{n+1} \le \frac{(x-1)^{n-1}}{x} \le (x-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{2}(x-1)^{n+1}\, dx \le \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\, dx \le \int_1^2 (x-1)^{n+1}\, dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{2(n+2)}\right]_1^2 \leq \text{Ln2} - (n+1)\,U_n \leq \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{(n+2)}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(n+2)} \leq \text{Ln2} - (n+1)\,U_n \leq \frac{1}{(n+2)}$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(n+2)} = 0$

d'où $\lim_{x \to +\infty} (\text{Ln2} - (n+1)\,U_n) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} ((n+1)\,U_n) = \text{Ln2}$$

3) $n \geq 1$ et $x \geq 0$

$$S_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \ldots\ldots + (-1)^n (x-1)^n$$

a) $S_n(x)$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suites géométrique de raison $q = -(x-1) \neq 1$

d'où

$$S_n(x) = \frac{1-[-(x-1)]^{n+1}}{1+(x-1)}$$

$$= \frac{1-(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$$

b) on a : pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Ln2} - (n+1)\,U_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow (-1)^{n+1}[\text{Ln2} - (n+1)\,U_n]$$

$$= \int_1^2 \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - S_n(x)\right)\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \delta_n(x)dx$$

$$= [\text{Ln}x]_1^2 - \int_1^2 \delta_n(x)dx$$

$$= \text{Ln2} - \left[x - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$$

$$= \text{Ln2} - \left[\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) - 1\right]_1^2$$

$$= \text{Ln2} - \left[\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]_1^2$$

$$= \text{Ln2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \text{Ln2} - V_n$$

D'où

$$\text{Ln2} - V_n = (-1)^{n+1}[\text{Ln2} - (n+1)U_n]$$

3) $\lim_{x \to +\infty} (\text{Ln2} - (n+1)\,U_n) = 0$

$$|\text{Ln2} - (n+1)\,U_n| = |\text{Ln2} - V_n|$$

D'où

$$\lim_{x \to +\infty} (\text{Ln2} - V_n) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} V_n = \text{Ln2}$$

EX 28 :

I)

1) $x\in[1,+\infty[$

$g(x)=xLnx-x+1$

a) $g'(x)=Lnx\geq 0 \quad \forall x\in[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
g'(x)	0 +	
g(x)	0 →	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x.[Lnx-1]+1=+\infty$

b) $g(x)\geq 0\,;\forall x\in[1,+\infty[$

2)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{Lnx} & si\ x>1\\ 1 & si\ x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\left\{\frac{Lnx}{x-1}\right\}1}=1=f(1)$$

D'où f est continue à droite en 1

3)

a)

$$*(t-1)-\left(1-\frac{1}{t}\right)=\frac{t^2-2t+1}{t}=\frac{(t-1)^2}{t}\geq 0$$

d'où $\boxed{1-\frac{1}{t}\leq t-1}(1)\,;\ \forall t\in[1,+\infty[$

$$*\left(1-\frac{1}{t}\right)-\left[t-1-(t-1)^2\right]=\frac{(t-1)^3}{t}\geq 0$$

D'où

$$\boxed{t-1-(t-1)^2\leq t-\frac{1}{t}}(2)$$

$(1)+(2)\Rightarrow$

$$t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$$

$\forall t\in[1,+\infty[$

b) $x\geq 1$

pour $t\in[1,x]$ on a :

$$(t-1)-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq(t-1)$$

$$\Rightarrow\int_1^x\left((t-1)-(t-1)^2\right)dt\leq\int_1^x\left(1-\frac{1}{t}\right)dt\leq\int_1^x(t-1)\,dt$$

$$\Rightarrow\left[\frac{(t-1)^2}{2}-\frac{(t-1)^3}{3}\right]_1^x\leq\left[t-Lnt\right]_1^x\leq\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x$$

$$\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\leq x-1-Lnx\leq\frac{(x-1)^2}{2}$$

c) pour $x>1$

$$\frac{1}{2}-\frac{x-1}{3}\leq\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\leq\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2}-\frac{(x-1)}{3}=\frac{1}{2}$$

D'où

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

d) pour $x>1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}=\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\right).f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}*1=\frac{1}{2}$$

d'où f est dérivable à droite en 1 et

$$f'_d(1)=\frac{1}{2}$$

4)

a) pour $x>1$

$$f'(x)=\frac{Lnx-\frac{1}{x}(x-1)}{(Lnx)^2}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(Lnx)^2}\geq 0$$

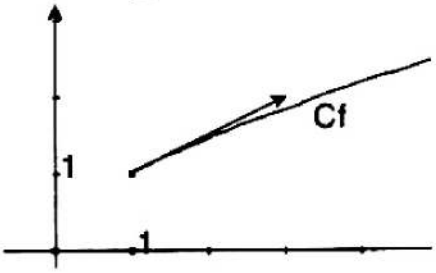
x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 →	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)}^{1}}{\underbrace{\left(\frac{Lnx}{x}\right)}_{0^+}} = +\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{Lnx} = 0$

(C) admet une B.I parabolique de diréction celle de $(o,\vec{i})$

$*f'_d(1) = \frac{1}{2}$



II)

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{1}{Lnt}dt & si\ x>1 \\ Ln2 & si\ x=1 \end{cases}$$

1)

a) $x>1$

$x \le t \le x^2 \Rightarrow \frac{x}{tLnt} \le \frac{1}{Lnt} \le \frac{x^2}{tLnt}$

Car $tLnt > 0$

b) $\frac{x}{tLnt} \le \frac{1}{Lnt} \le \frac{x^2}{tLnt}$

pour $t \in [x, x^2]$

$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{x}{tLnt}dt \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{Lnt} \le \int_x^{x^2} \frac{x^2}{tLnt}dt$

$\Rightarrow x.[Ln(Lnt)]_x^{x^2} \le F(x) \le x^2.[Ln(Lnt)]_x^{x^2}$

$\Rightarrow xLn2 \le F(x) \le x^2 Ln2$

c) $\lim_{x\to1^+} xLn2 = \lim_{x\to1^+} x^2 Ln2 = Ln2 = F(1)$

d'où F est continue a droite en 1.

3)

a) la fonction $U : t \mapsto \frac{1}{Lnt}$ est continue sur $]1,+\infty[$, soit V une primitive de U sur $]1,+\infty[$

$F(x) = [V(t)]_x^{x^2}$

$F(x) = V(x^2) - V(x)$

V est dérivable sur $]1,+\infty[$

$x \mapsto V(x^2)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ (composée de deux fonctions dérivables)

D'où F est dérivable sur $]1,+\infty[$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x.V'(x^2) - V'(x) \\ &= 2xU(x^2) - U(x) \\ &= 2x\frac{1}{Ln(x^2)} - \frac{1}{Lnx} \\ &= \frac{2x}{2Lnx} - \frac{1}{Lnx} = \frac{x-1}{Lnx} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) $x>1$

F est continue sur $[1,x]$ dérivable sur $]1,x[$

D'après le théorème des Acc.finis

Il existe $c \in]1,x[$ tel que :

$F(x) - F(1) = (x-1).F'(c)$

c) lorsque :

$x \to 1^+$

$c \to 1^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+} F'(c) \\ &= \lim_{x\to1^+} f(c) \\ &= f(1) = 1 \end{aligned}$$

Car f est continue en 1 à droite, d'où F est dérivable à droite en 1 et $F'_d(1) = 1$

4)
$F'(x) = f(x) > 0$

x	1	$+\infty$
$F'(x)$	+	
$F(x)$	Ln 2 ↗	$+\infty$

* $F(x) \geq x \operatorname{Ln} 2$ pour $x > 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x.Ln(2) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

* déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$

Pour $x > 1$

$x \leq t \leq x^2 \Rightarrow \operatorname{Ln} x \leq \operatorname{Ln} t \leq \operatorname{Ln} x^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\operatorname{Ln} x} \leq \dfrac{1}{\operatorname{Ln} t} \leq \dfrac{1}{\operatorname{Ln} x}$

$\rightarrow \int_x^{x^2} \dfrac{1}{2\operatorname{Ln} x}\, dt \leq F(x) \leq \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\operatorname{Ln} x}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 - x}{2\operatorname{Ln} x} \leq F(x) \leq \dfrac{x^2 - x}{\operatorname{Ln} x}$

$\Rightarrow F(x) \geq \dfrac{x^2 - x}{2\operatorname{Ln} x}$

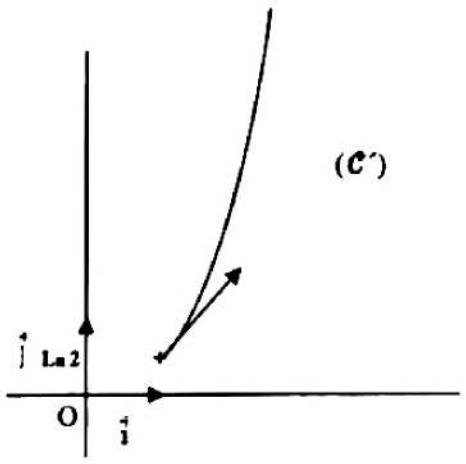
$\Rightarrow \dfrac{F(x)}{x} \geq \dfrac{x - 1}{2\operatorname{Ln} x}$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{2\operatorname{Ln} x} =$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} f(x) = +\infty$

D'où $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$

(C') admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$



III) $\alpha > 1$

1) pour tout $x \in]1, +\infty[$

$F(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\operatorname{Ln} t}$

Soit $G(x) = \int_1^x f(t)\, dt + \operatorname{Ln} 2$

On a : $F'(x) = f(x)$

$G'(x) = f(x)$

D'où : $F(x) = G(x) + k$, $k \in IR$

$F(1) = G(1) + k \Rightarrow k = 0$

d'où

$F(x) = G(x)$; $\forall x \in]1, +\infty[$

$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt + \operatorname{Ln} 2$

2) $A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(t)\,dt$

$A(x) = F(\alpha) - \ln 2$

$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha} =$

$\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{F(\alpha)}{\alpha}\right) - \frac{\ln 2}{\alpha} = +\infty$ ($\frac{F(\alpha)}{\alpha} \to +\infty$)

D'après 4)

$$\frac{\alpha^2-\alpha}{2\ln \alpha} \le F(\alpha) \le \frac{\alpha^2-\alpha}{\ln \alpha}$$

$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{2\ln \alpha} \le \frac{F(\alpha)}{x^2} \le \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{\ln \alpha}$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{\ln \alpha} = 0$$

D'où :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{F(\alpha)}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

EXERCICE 29

I - 1) $h(x) = x - \ln x$

a) $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	-	0	+	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ ($\frac{\ln x}{x} \to 0$)

b) h admet 1 comme minimum absolu alors

$h(x) \geq 1 \; ; \quad \forall x \in]0, +\infty[$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) f est continue sur $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x - \ln x} = 0 = f(0)$

d' ou f est continue sur $[0, +\infty[$

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x\ln x} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

II) $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

$x \in [0, +\infty[$

1) a)

$F(x) = \int_1^{2x} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt$

f est continue sur $[0, +\infty[$ et

$1 \in [0, +\infty[$

D'où la fonction :

$x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$x \mapsto f(x)$

* $U : x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $U([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ $\Rightarrow$
* f est continue sur $[0, +\infty[$

$x \mapsto \int_1^{2x} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$x \mapsto 2f(2x)$ et par suite F est dérivable sur $[0, +\infty[$

b) pour $x > 0$

$F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$= \frac{2}{2x - \ln 2x} - \frac{1}{x - \ln x}$

$= \frac{2h(x) - h(2x)}{h(2x).h(x)} = \frac{\ln 2 - \ln x}{h(2x).h(x)}$

* $F'_d(0) = 2f(0) - f(0) = 0$

2) $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\text{Lnt}]_x^{2x} = \text{Ln}2$

3) $F(x) - \text{Ln}2 = \int_x^{2x} f(t)\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

$= \int_x^{2x} (f(t) - \frac{1}{t})\,dt = \int_x^{2x} \frac{\text{Lnt}}{t.h(t)}\,dt$

$x \geq 1$

Pour $t \in [x, 2x]$

$h(t) \geq h(x)$ car h est croissante sur

$[1, +\infty[\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h(x)}$ et

$0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ et $0 \leq \text{Lnt} \leq \text{Ln}(2x)$

D'où $0 \leq \frac{\text{Lnt}}{th(t)} \leq \frac{\text{Ln}(2x)}{xh(x)}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Lnt}}{t.h(t)}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Ln}(2x)}{xh(x)} dt$

$\Rightarrow 0 \leq F(x) - \text{Ln}2 \leq \frac{\text{Ln}(2x)}{h(x)}$

$\Rightarrow * \quad 0 \leq F(x) - \text{Ln}2 \leq \frac{\text{Ln}(2x)}{x - \text{Ln}x}$

Pour $x \geq 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Ln}(2x)}{x - \text{Ln}x} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\text{Ln}2}{x} + \frac{\text{Ln}x}{x}}{1 - \frac{\text{Ln}x}{x}} = 0$ d'où :

$\lim_{x \to +\infty} (F(x) - \text{Ln}2) = 0$

Donc : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \text{Ln}2$

4) a)

$F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t - \text{Lnt}}\,dt$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Rightarrow \text{Lnt} \leq 0$

$\Rightarrow -\text{Lnt} \geq 0$

$\Rightarrow t - \text{Lnt} \geq t$

$\Rightarrow \frac{1}{t - \text{Lnt}} \leq \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t - \text{Lnt}}\,dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t} dt$

$\Rightarrow F(\frac{1}{2}) \leq [\text{Lnt}]_{\frac{1}{2}}^{1} \Rightarrow F(\frac{1}{2}) \leq \text{Ln}2$

b) on a :

$F(\frac{1}{2}) \leq \text{Ln}2$ et $F(1) \geq \text{Ln}(2)$ d'après 3)

F est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$

Ln2 est compris entre $F(\frac{1}{2})$ et $F(1)$

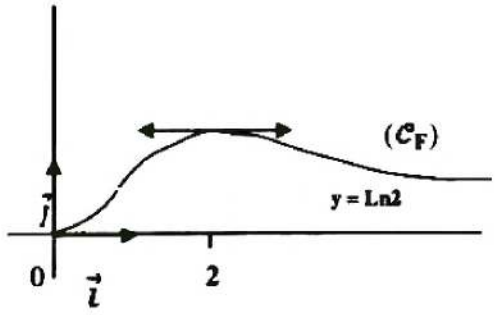
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ tels que $F(\alpha) = \text{Ln}2$

5) a)

$$F'(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{h(2x).h(x)} > 0$$

x	0	2	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$	0 ↗	F(2)	↘ Ln2

b)



$F'_d(0) = 0$

III) $n \in IN^*$

1) $v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{t \ln t}\, dt$

a) on a : $h(t) \geq 1$; $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\rightarrow \frac{1}{h(t)} \leq 1 \quad \rightarrow \frac{t}{h(t)} \leq t$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t - \ln t} \leq t \quad ; \forall t \in]0, +\infty[$$

b) $v_{n+1} = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{t}{h(t)}\, dt$

$$v_{n+1} = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{h(t)}\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{h(t)}\, dt$$

$$v_{n+1} - v_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{h(t)}\, dt$$

$v_{n+1} - v_n \geq 0$ car $\frac{t}{h(t)} \geq 0$

$\forall t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$

D'où v_n est croissante

c) pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$

$0 \leq \frac{t}{h(t)} \leq t$ d'après a)

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{h(t)}\, dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} t\, dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \nu_n \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$\rightarrow 0 \leq \nu_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\begin{cases} * \ \nu_n \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (\nu_n) \text{ est croissante d'où} \end{cases}$$

(ν_n) est convergente

$$0 \leq \nu_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to +\infty} \nu_n \leq \frac{1}{2}$$

2) $\omega_n = \int_1^n \frac{t}{h(t)}\,dt \ ; \ n \geq 1$

a)

$$(1 + \text{Lnt}) - \left(\frac{t}{t - \text{Lnt}}\right)$$

$$= \frac{t\text{Lnt} - \text{Lnt} - (\text{Lnt})^2}{h(t)}$$

$$= \frac{\text{Lnt}(t - 1 - \text{Lnt})}{h(t)} = \frac{\text{Lnt}(h(t) - 1)}{h(t)} \geq 0$$

Car $t \geq 1$ et $h(t) \geq 1$ d'où

$$\frac{t}{t - \text{Lnt}} \leq 1 + \text{Lnt} \ ; \ \forall t \in [1, +\infty[$$

b) $\int_1^n (1 + \frac{\text{Lnt}}{t})\,dt = \left[t + \frac{1}{2}(\text{Lnt})^2\right]_1^n$

$$= n - 1 + \frac{1}{2}(\text{Ln}(n))^2$$

c) pour $t \geq 1$

$$\frac{t}{t - \text{Lnt}} = \frac{(t - \text{Lnt}) + \text{Lnt}}{t - \text{Lnt}}$$

$$= 1 + \frac{\text{Lnt}}{t - \text{Lnt}} \geq 1 + \frac{\text{Lnt}}{t} \quad \text{car Lnt} \geq 0$$

D'où

$$\int_1^n \left(\frac{t}{t - \text{Lnt}}\right) dt \geq \int_1^n (1 + \frac{\text{Lnt}}{t})\,dt$$

$$\Rightarrow \omega_n \geq n - 1 + \frac{1}{2}(\text{Ln}(n))^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} n - 1 + \frac{1}{2}(\text{Ln}(n))^2 = +\infty$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \omega_n = +\infty$

EXERCICE 30

A $x \in [2, +\infty[$

$f(x) = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 4})$

1) – a) la fonction :

$x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 4}$ est dérivable sur

$]2, +\infty[$ (car $x^2 - 4 > 0$)
et strictement positive
d'où f est dérivable sur $]2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x + \sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\text{Ln}(x + \sqrt{x^2-4}) - \text{Ln}2}{x-2}$$

On pose $X = x + \sqrt{x^2 - 4}$

$x \to 2^+$ alors $X \to 2^+$

$x = \frac{X^2+4}{2X}$

Alors $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\text{Ln}X - \text{Ln}2}{\frac{X^2+4}{2X} - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\text{Ln}X - \text{Ln}2}{\frac{(X-2)^2}{2X}}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{2x}{X-2}\right)\left(\frac{\text{Ln}X - \text{Ln}2}{X-2}\right) = +\infty$$

$\searrow +\infty$ $\qquad$ $\searrow \text{Ln}'2 = \frac{1}{2}$

f n'est pas dérivable à droite en 2

c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} > 0$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	Ln2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 4}) = +\infty$$

$\searrow +\infty$

2) – a) on pose : $\varphi(x) = f(x) - x$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{5 - x^2}{\sqrt{x^2-4}(1+\sqrt{x^2-4})}$$

x	2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	
$\varphi(x)$	Ln2-2	↗	$\varphi(\sqrt{5})$	↘	$-\infty$

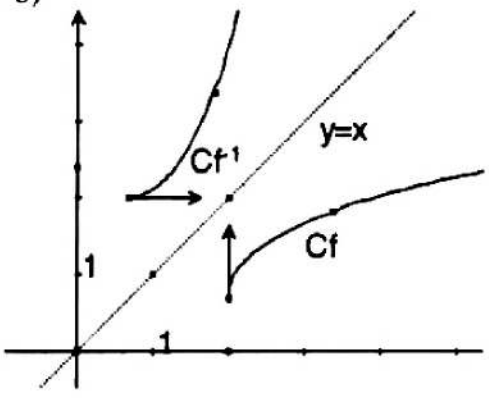
$\varphi(\sqrt{5}) = \text{Ln}(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{5} < 0$

φ admet $\varphi(\sqrt{5})$ comme maximum absolu

$\Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(\sqrt{5}) \quad \forall x \in [2, +\infty[$

$\Rightarrow \varphi(x) < 0$ d'où (C_f) est au dessous de D

b)



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln}\left[x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{Ln}x}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{\operatorname{Ln}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}{x}}_{0} = 0$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$

3) – a) f est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$ elle réalise donc une bijection de $[2, +\infty[$ sur $[\operatorname{Ln}2, +\infty[$

b) $(\mathcal{C}_f^{-1}) = S_D(\mathcal{C}_f)$

B $x \in [2, +\infty[$

$$F(x) = \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)\, dt$$

1) la fonction $u : x \longmapsto \frac{2}{x}$ est dérivable sur $]0, 1]$ et

$u(]0, 1]) = [2, +\infty[$

Comme f est continue sur $[2, +\infty[$ alors F est dérivable sur $]0, 1]$ et :

$$F'(x) = u'(x).f(u(x))$$

$$F'(x) = \frac{-2}{x^2} \operatorname{Ln}\left[\frac{2}{x} + \sqrt{\frac{4}{x^2} - 4}\right]$$

$$F'(x) = \frac{-2}{x^2} \operatorname{Ln}\left[\frac{2}{x}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\right]$$

2) a) $t \in [2, +\infty[$

$$t + \sqrt{t^2 - 4} \geq t \Rightarrow \operatorname{Ln}(t + \sqrt{t^2 - 4}) \geq \operatorname{Ln}t$$

$$\Rightarrow f(t) \geq \operatorname{Ln}t$$

b) $\int_2^{\frac{2}{x}} \operatorname{Ln}t\, dt = [t\operatorname{Ln}t - t]_2^{\frac{2}{x}}$

$$= \frac{2}{x}\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right] - [2\operatorname{Ln}2 - 2]$$

$$= \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) - 2(\operatorname{Ln}2 - 1)$$

c) pour $t \in [2, \frac{2}{x}]$ $f(t) \geq \operatorname{Ln}t$

$$\Rightarrow \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)\, dt \geq \int_2^{\frac{2}{x}} \operatorname{Ln}t\, dt$$

$$\rightarrow F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) - 2(\operatorname{Ln}2 - 1)$$

$$\Rightarrow F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right)$$

Car $-2(\operatorname{Ln}2 - 1) > 0$

d) pour $x \in]0, 1]$

$$F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right)$$

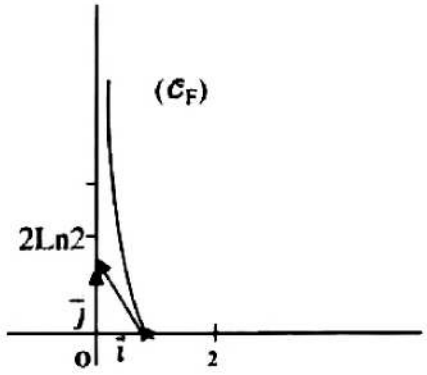
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) = +\infty$$

D'où $\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$

3) $F'(x) < 0$; $\forall x \in]0, 1]$

x	0	1
$F'(x)$	-	
$F(x)$	$+\infty$ ↘	0

$F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$



$F_g'(1) = -2\,Ln2$

C) $x \in]2, +\infty[$; $n \in IN$

$$g_n(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

$$\ell_n = \lim_{x \to 2^+} g_n(x)$$

1) la fonction : $t \mapsto \frac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}$ est continue

Sur $]2, +\infty[$ et $2\sqrt{2} \in]2, +\infty[$ d'où l'existence de $g_n(x)$ pour $x \in]2, +\infty[$

2) $g_0(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$

$$= \int_{2\sqrt{2}}^{x} f'(t)\,dt$$

$$= [f(t)]_{2\sqrt{2}}^{x} = f(x) - f(2\sqrt{2})$$

$$g_0(x) = Ln(x + \sqrt{x^2-4}) - Ln(2+2\sqrt{2})$$

$$\ell_0 = \lim_{x \to 2^+} g_0(x) = Ln2 - Ln(2+2\sqrt{2})$$

$$\ell_0 = -Ln(1+\sqrt{2})$$

3) $g_1(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$

On pose :

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} \longrightarrow u(t) = \sqrt{t^2-4} \\ v(t) = t \longrightarrow v'(t) = 1 \end{cases}$$

$$g_1(x) = \left[t\sqrt{t^2-4}\right]_{2\sqrt{2}}^{x} - \int_{2\sqrt{2}}^{x} \sqrt{t^2-4}\,dt$$

$$\int_{2\sqrt{2}}^{x} \sqrt{t^2-4}\,dt = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^2-4}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

$$= \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2-4}}\,dt - 4\int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}}$$

$$\int_{2\sqrt{2}}^{x} \sqrt{t^2-4}\,dt = g_1(x) - 4\,g_0(x)$$

D'où

$$g_1(x) = \left[t\sqrt{t^2-4}\right]_{2\sqrt{2}}^{x} - g_1(x) + 4\,g_0(x)$$

$$\Rightarrow 2\,g_1(x) = x\sqrt{x^2-4} - 4\sqrt{2} + 4\,g_0(x)$$

$$\Rightarrow g_1(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{2} + 2\,g_0(x)$$

$$\ell_1 = \lim_{x \to 2^+} g_1(x)$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{2} + 2\,g_0(x)\right)$$

$$= -2\sqrt{2} + 2\,\ell_0$$

$$\ell_1 = -2\sqrt{2} - 2.Ln(1+\sqrt{2})$$

4) – a)

$$g_{n+1}(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

on pose

$$\begin{cases} u(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} \longrightarrow U(t) = \sqrt{t^2-4} \\ v(t) = t^{2n+1} \longrightarrow v'(t) = (2n+1)t^{2n} \end{cases}$$

D'où :

$$g_{n+1}(x) = \left[t^{2n+1}\sqrt{t^2-4}\right]_{2\sqrt{2}}^{x} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\,dt$$

$$g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\,dt$$

b)

$$g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n+2}-4t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

$$g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\left[g_{n+1}(x) - 4g_n(x)\right]$$

$$\Rightarrow (2n+2)\,g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} + 4(2n+1)\,g_n(x)$$

c) passage aux limites lorsque $x \longrightarrow 2^+$

on aura :

$$(2n+2)\,\ell_{n+1} = 4(2n+1)\,\ell_n - 2^{3n+2}\sqrt{2}$$

$$\ell_{n+1} = \frac{2.(2n+1)}{n+1}.l_n - \frac{2^{3n+1}.\sqrt{2}}{n+1}$$